This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
433 06909591 1

YPL RESEARCH LIBRARIES
433 06909591 1

OKN
Rohl

Spherics
(I. c.)

Die Kugelfläche

als

mathematisches Constructionsfeld im Gegensatze der Ebene

oder

die Geometrie

und

Trigonometrie auf der Sphäre

in

ihren Elementen ausführlich dargestellt

von

Georg Friedrich Pohl.

ASTOR LIBRARY

Mit 6 Kupfertafeln.

Berlin 1819,
gedruckt und verlegt
bei Georg Reimer.

ГІВНУША
ІМІТІС
ЖЕЛАЛОВК

Vorrede.

So nothwendig der Mensch in seinem Embryonenzustande eine Zeitlang an den Leib der Mutter gefesselt ist, bis der Fortgang seiner Bildung von selbst das anfängliche Band löst und ihn in den selbstständigeren Kreis seines eigenen Lebens hinein treten läßt, so gewiß ist auch jede geistige Frucht in den ersten Perioden ihres Wachsthums an irgend ein mütterliches Individuum gebunden, das so lange den Träger und Vermittler ihres aufkeimenden Lebens bildet, bis dieses früher oder später, oft in einem Moment, oft in Jahrhunderten erst, zu eigner Kraft erwacht und in einer abgeschlossenen Sphäre sein eigenthümliches Dasein beginnt und fortführt.

Dieser einfache Hergang ist ohne Zweifel der allgemeinste Umriß der Entwickelungsgeschichte einer jeden abstracten Wissenschaft. Die Philosophie war in der frühesten Zeit ihres Erwachens an die Außenwelt und deren sinnliche Wahrnehmung auf das innigste gebunden und die Mathematik war in ihrem Beginnen nur das Erzeugniß empirischer Zahl- und Raumconstructionen, die sich, dem praktischen Lebensverkehr zu Gunsten, ohne ein höheres wissenschaftliches Bewußtsein in gesetzloser Mannigfaltigkeit hervorthaten und ausbildeten.

Was in dieser Hinsicht das allgemeine Geschick der Wissenschaft, namentlich der mathematischen, im Ganzen war, das mußte natürlich für jedes einzelne Organ derselben, nach Maßgabe seiner besondern Natur mehr

oder weniger sichtbar in derselben Gestalt sich wiederholen. Die Geometrie der Ebene wurde in den fruchtbaren Thälern des Nils an dem Bedürfniß der Ackervermessung geweckt und so lange fortgestaltet, bis der eigenthümliche Geist der Wissenschaft aus diesen beschränkten Regungen ihres Ursprungs allseitiger hervorbrach und sie von der empirischen Unterlage hinweg auf den eigentlichen absoluten Standpunct ihrer Bedeutsamkeit hinauf hob, von dem aus sie Jahrtausende lang die Gesetzgeberin für eine unbestimmbare Zahl räumlicher Verhältnisse gewesen ist und fortwährend seyn wird. — Die Geometrie der Sphäre entfaltete ihre frühesten Keime gleichfalls auf einem empirischen Gefilde, nur nicht auf den dunkeln Fluren der Erde, sondern vorzugsweise auf den leuchtenden, ewig blühenden Feldern des Himmelsgewölbes. — Wie die Ebenengeometrie das Kind des Ackerbaues, so wurde die Sphärengeometrie *) die Tochter der Astronomie, und Ackerbau und Astronomie, die in der Geschichte der Menschheit überhaupt als die ehrwürdigsten und heiligsten Denkmäler ihrer frühesten Cultur umfaßt werden, sind so zugleich auch für die Geschichte der reinen Mathematik zwei höchst bedeutungsvolle, segensreiche Erscheinungen.

Daß indeß die Sphärengeometrie aus ihrer Abhängigkeit von der Astronomie verhältnißmäßig eben so bald hervorgegangen und zu gleicher Selbstständigkeit und Kraft, wie ihre Gefährtin, die Ebenengeometrie, sich empor gearbeitet hätte, davon mangeln für die alte Geschichte, wenigstens in Beziehung auf eine exoterische Ausübung der Wissenschaft, die Nachweisungen; ja die schwerfälligen Aequatoreal- und Zodiakalarmillen des Eratosthenes, so wie der auch in der neugeschichtlichen Zeit, selbst noch vom Tycho de Brahe, fortgesetzte Gebrauch derselben, können als redende Beweise vom Gegentheil betrachtet werden. Das mächtige Uebergewicht der Ebenengeometrie und die Kraft, mit der sie, bei ihrer weitern Ausbildung zur Stereo-

*) In Beziehung auf den Gebrauch dieser Wortformen verweise ich auf die Anmerkung zum 4ten Satze der Einleitung.

metrie, selbst die Auflösung der Hauptprobleme über die koniſchen, cylindriſchen und ſphäriſchen Körper ſich unterwarf, vernichteten vielmehr äußerlich noch die in der Idee nothwendig gegebene Selbſtändigkeit der Sphärengeometrie, ein dürftiges Fragment der letzteren wurde nur als ein Theil der Stereometrie in die Reihe der Theoreme über die Kugel zurückgedrängt, und während die Ebenengeometrie, in ihrer urſprünglichen Geſtalt längſt begründet, mit der neueren Zeit ſich zugleich unter der Form der arithmetiſchen Conſtruction zur Trigonometrie ausbildete, wurde gleichfalls die Sphärengeometrie, ohne jedoch vorher in ihrer eigenthümlichſten Geſtalt ein ſelbſtändiges Leben gewonnen zu haben, nur in der untergeordneten trigonometriſchen Form eine bloße Dienerin der Aſtronomie; ſo daß ſich mit Recht ſagen läßt, die Geometrie der Sphäre habe noch bis auf den heutigen Tag ihrem empiriſchen Urſprunge ſich nicht entwunden, während die Geometrie der Ebene denſelben Jahrtauſende lang bereits verleugnet hat.

Das Verhältniß beider Wiſſenſchaften in ihrer gegenwärtigen Erſcheinung iſt ſonach auch gerade das entgegengeſetzte von dem, was es eigentlich ſein ſollte und irgend einmal gewiß werden wird. Die Kugelfläche und die Ebene, ſo wie ihre Erzeugungselemente, der Kreis und die gerade Linie, ſtellen ſo gewiß den allgemeinen polariſchen Gegenſatz unter ſich dar, wie derſelbe in der Natur unter irgend einer Form, z. B. zwiſchen Oxygen und Hydrogen, ſich nur zu offenbaren vermag. Aber gleich wie jeder zur Erſcheinung gebrachte Gegenſatz als ſolcher niemals abſolut, ſondern nothwendig immer nur von der Beſchaffenheit ſeyn kann, daß der eine von beiden Polen den andern, als ſeine bloß relative Entgegenſetzung, für einen höheren Standpunct der Anſchauung, als ein mit ihm wahrhaft Gleichartiges, in ſich aufnimmt, ſo wie z. B. das Hydrogen der Erſcheinung, nicht als ein abſolut widerſtrebendes, ſondern nur als ein minder oxygenirtes dem Oxygen ſcheinbar entgegen tritt, ſo muß auch der Gegenſatz zwiſchen der Sphäre und Ebene vor der auf einer höheren Stufe gehaltenen Anſchauung nothwendig wiederum ſich indifferenziren,

und zwar so, daß die Ebene als der der Kugel untergeordnete, von ihr aufgenommene Factor sich darbietet; nicht umgekehrt. Die Ebene nehmlich muß als eine in unendlich großer Entfernung von ihrem Centrum kreisende und mithin selbst unendlich große Kugelfläche gesetzt werden, eine Ansicht, die sich selbst durch mehrfache Darlegungen der niedern und höhern Mathematik faktisch nachweisen läßt; aber die Kugel umgekehrt unter irgend einer Potenz in die Ebene aufgehen zu lassen, ist ein aller Beziehung und Vermittlung ermangelnder, der reinen wie der empirischen Anschauung widerstrebender Versuch.

Statt also die Sphärik durch die Ebenengeometrie zu bestimmen, ist es vielmehr eine mit der obigen Ansicht unfehlbar zusammenhängende Folgerung, daß mit der in ihrer Absolutheit einmal erfaßten und durchgeführten Sphärengeometrie auch die Geometrie der Ebene gegeben und aus derselben, nur als eine besondere Modification von ihr, vollständig abzuleiten sein müsse; wie ja in der That bereits nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft die Trigonometrie auf der Ebene nur der Reflex von der auf der Sphäre ist, indem sich die Formeln für die Auflösung des sphärischen Dreiecks in diejenigen, welche unter übrigens gleichen Umständen für die Auflösung des geradlinigen gültig sind, verwandeln, sobald man das sphärische Dreieck als einen unendlich kleinen Theil von der endlichen Kugelfläche, oder, welches eben dasselbe ist, als einen endlichen Theil von einer unendlich großen Kugelfläche, d. h. von einer Ebene, setzt.

Wie lange es noch währen möge, bis die Sphärik zu dieser Größe sich erhoben haben wird, daß sie, die Stärke der an sich schon so mächtigen Ebenengeometrie gefangen haltend, als die Inhaberin von bis jetzt noch unerkannten Bewältigungsmitteln der zahlreichsten geometrischen Constructionsaufgaben, selbst derjenigen, an welchen die Ebenengeometrie zu allen Zeiten die Gränzen ihrer Herrschaft kennen lernen müßte, sich ankündigen wird, ist eine Frage, deren Beantwortung lediglich der Zeit anheim gestellt bleiben muß; aber die schon so lange begonnene und geübte Sphärentrigo-

nometrie fordert unterdeß wenigstens einen entsprechenden Anfang der Sphärengeometrie, eine bestimmte, in sich gesonderte Grundlegung ihrer ersten Elemente, so weit dieselben mit der Entwickelung der wesentlichsten, rein geometrischen Constructionsgesetze des sphärischen Dreiecks zusammenhängen, um auf dieser Basis zugleich dem Vortrage der Sphärentrigonometrie die Unabhängigkeit, Bündigkeit, Bestimmtheit und Evidenz zu begründen, welche zur eigenthümlichen Würde einer jeden geometrischen Disciplin, selbst auch dann, wenn sie sich in das Gewand der Arithmetik gehüllt hat, erfordert werden — Eigenschaften, welche der durch die Ebenengeometrie gehörig vorbereiteten Ebenentrigonometrie noch niemand streitig gemacht hat, welche aber bei der Sphärentrigonometrie von jeher vermißt worden sind, und deren Mangel ein Gegenstand der allgemeinen Klage von Seiten der Schüler sowohl wie der Lehrer gewesen ist.

Daß dieser Mangel in einer der sphärischen Construktion von Natur eigenthümlichen geringern Evidenz in Vergleich mit der Construction auf der Ebene zu suchen sei, ist eine so grundlose Meinung, daß sich derselben vielmehr die umgekehrte Behauptung mit einem Uebergewicht von Gründen entgegen stellen ließe. Wie sich in der physischen Welt die Kugelform schon dem äußern Auge überall als die Grundform des Universums, im Wassertropfen wie im Planeten, in jedem strahlenden Puncte wie in dem zu jeder Zeit vorliegenden Anblick des Himmelsgewölbes darbietet und befreundet, so ist selbst der reine Constructionsact des absoluten Raums nur als eine über alle Endlichkeit hinausgehende Evolution von größern und größern Sphären zu setzen, und die Kugelfläche, als die schlechthin einfachste, allseitig gleichmäßigste Begränzung des Raums ist analytisch unstreitig früher als die Ebene gegeben. Demzufolge läßt sich erwarten, daß verhältnißmäßig die Constructionen auf der Sphäre auch leichter und befreundeter der Anschauung entgegen treten werden, wie die auf der Ebene und es ist eine hiemit übereinstimmende, gewiß ziemlich allgemeine Erfahrung, daß selbst der Mathematik ganz Unkundige häufig das ganze Gebilde vielfach sich durch-

kreuzender Kreise auf einer Kugelfläche mit Leichtigkeit und ohne Verwirrung auffassen und sogar den Curven einer Kugelprojection ihre richtige Bedeutung geben, während etwas zusammengesetzte Figuren der Ebenengeometrie und vollends geradlinige perspectivische Entwürfe längere Zeit hindurch etwas fremdartiges oder völlig unverständliches für sie zu behalten pflegen.

Nur die Mehrzahl von Nebenbestimmungen, welche bei irgend einer Construktion auf der Sphäre als nothwendige Folge der endlichen Abgeschlossenheit der letzteren zugleich mit hervorgerufen werden, und bei einer wissenschaftlichen allseitigen Ergründung stets mit berücksichtigt werden müssen, während sie unter übrigens gleichen Umständen auf der unendlichen Ebene als ungeschlossene Räume gänzlich unbeachtet bleiben (wie z. B. das ebene Dreieck außer sich kein anderes, das sphärische hingegen zugleich sieben andere mit bestimmt), machen die Entwickelungen und Demonstrationen der Sphärengeometrie weitläuftiger und zusammengesetzter wie in der Ebenengeometrie. Dieser Umstand ist es aber auch, aus dem, beim Mangel einer geregelten und erschöpfenden Grundlegung der einfachsten Constructionsgesetze der Sphärengeometrie und insbesondere der des sphärischen Dreiecks, die scheinbar große Schwierigkeit der Sphärentrigonometrie sich herschreibt; weil sobald auf irgend einer untern Entwickelungsstufe nur der nächste Zweck der Construction mit Vernachlässigung aller übrigen Seitenbestimmungen ins Auge gefaßt wird, daraus unvermeidlich für die folgenden Resultate eine Menge von Unbestimmtheiten, Verwechslungen und Verwirrungen hervorgehen müssen, die den Schüler entweder in die Empirie eines geistlosen, blindlings folgenden Mechanismus oder in einen ängstigenden Zwiespalt mit sich und seinem Führer versetzen, aus dem er gar nicht oder nur nach unverhältnißmäßig langer, unnöthiger Anstrengung durch seinen eigenen, besseren Genius heraus geführt wird.

Da jene erschöpfende Exposition des Mannigfaltigen jeder einzelnen sphärischen Construktion in der Darlegung der Trigonometrie selber nicht

mehr

mehr statt finden kann, wenn sie den Zusammenhang des Vortrags nicht unaufhörlich auseinander reißen und das eigentliche Ziel der Entwickelung dem Geiste beständig entrücken soll, und da sie demohngeachtet nicht fehlen darf, wenn die Darstellung einen angemessenen Grad von geometrischer Evidenz behalten und nicht lediglich durch einen, für den Schüler hier immer noch substratlosen Calcul verschlungen werden soll: so muß man sich in der That wundern, wie so viel Schriftsteller, bei dem besten und mehrfach ausgesprochenen Bestreben der Deutlichkeit, die so einfache und durch Analogie so nah gelegte Idee einer vorausgeschickten Grundlegung der Sphärengeometrie völlig übersehen konnten. Ohne die, freilich auch nicht ganz leichte Realisirung derselben mußte fast jeder Versuch einer elementarischen Darlegung der Sphärentrigonometrie mehr oder weniger nur ein unsymmetrisches und unzulängliches Gemisch bilden, in welchem bald geometrische, bald trigonometrische Lehrsätze und analytische vom Schüler undurchdrungene Formeln regellos durch einander liegen. Dazu kommt, daß die Verfasser diese innere Gebrechlichkeit allemal mit einer in Beispielen aus der Astronomie und mathematischen Geographie bestehenden praktischen Zugabe zu stützen suchten, die aber natürlich weiter als etwas aus einem größern Zusammenhange herausgerissenes und unvollständiges, der Absicht geradehin entgegen, die Unklarheit und Verwirrung im Kopfe des Schülers viel eher noch vergrößern als beseitigen mußte. — So ist es in der That kein ungerechtes Urtheil, wenn man, in Beziehung auf die im Anfange dieser Vorrede geäußerten Gedanken, aus der Mehrzahl von Lehrbüchern der Sphärentrigonometrie, jedes einzelne nur als einen Embryo der Sphärik bezeichnet, der mit theils gänzlich mangelnden, theils nur verworrenen und unvollständig ausgebildeten Organen noch an seiner astronomischen Placenta haftet.

Was die gegenwärtige Schrift anbetrifft, so habe ich das Vertrauen zu ihr, daß sie sich als ein von jener hinfälligen Mutgeburt nicht bloß mechanisch getrenntes, sondern auch organisch über sie hinaus gebildetes Ein-

zeugniß werde betrachten lassen. — Wer nur eine populäre Kenntniß der Astronomie sich aneignen will, der bedarf, meiner Meinung nach, dazu durchaus keiner Sphärentrigonometrie, da dasjenige, was aus ihrer Einführung in jene entspringt, beim Lichte besehen, doch nur ein täuschendes Spielwerk und leere Spiegelfechterei bildet. Wem die Lust und Beharrlichkeit mangelt, durch ein völlig strenges, aus der Empirie gänzlich herausgetretenes System der Sphärik, um der Wissenschaft selbst willen sich hindurch zu arbeiten, der ist auch zu einer tieferen, geistvollen Betreibung der Astronomie ganz untauglich, und wer endlich nach einem gründlichen Studium der Sphärik und im Besitz reeller Hülfsmittel an das der Astronomie gehen will, der sucht die Unterweisung dazu in solchen Werken, die als ein Ganzes für sich ausschließlich der letzteren Wissenschaft gewidmet sind. — Die Hauptaufgabe bei der Abfassung dieses Lehrbuchs ist daher eine streng wissenschaftliche, durchaus selbstständige, von aller praktischen Anwendung und von allen Nebenzwecken gänzlich hinwegsehende und so weit, als es zu einer lichtvollen Einsicht in den bedeutungsvollen Zusammenhang der analytischen und geometrischen Construction nöthig ist, überall auf letztere zurückgeführte Darlegung der Hauptlehren der Elementarsphärik gewesen.

Diese Aufgabe ist so gelöst, daß zugleich dem Schüler der Sphärik, wenn er anders die Vorkenntnisse besitzt, welche das Studium der Sphärentrigonometrie nothwendig fordert, dieses Buch die Stelle eines Lehrers ersetzen wird, der ruhig und sicher, jedoch unter stetem Anspruche der theils geweckten, theils ferner zu entwickelnden Selbstkraft des Schülers zum Ziele führt, und diesem Gesichtspunct zufolge wird das Buch auch noch von Lehrern, bei einem der Sphärik ausschließlich gewidmeten Lehrcursus, als Grundlage des Vortrags benutzt werden können.

So wenig ich mich übrigens darauf einlassen mag, Vorzüge und Eigenthümlichkeiten meiner Arbeit hier besonders hervorzuheben, die, sofern sie vorhanden sind, von den Kennern bei einer aufmerksamen Beurtheilung

ohne meine Erinnerung wahrgenommen werden, so wenig kommt es mir auch darauf an, die mit jener Eigenthümlichkeit hier, wie immer, unfehlbar verbundenen persönlichen Mängel und Schwächen verdecken oder entschuldigen zu wollen, da ich durchaus ohne alle Veranlassung von Außen her, sondern allein aus reiner Liebe zur Wissenschaft und zum Vortheil für den Schüler derselben geschrieben habe und in sofern gegründeten Tadel vielmehr mit Dank anerkennen, als mich demselben zu entziehen wünschen muß. — Nur einem möglichen Vorwurf, der, gegen das Ganze gerichtet, demselben den Schein der Inconsequenz aufheften möchte, kann ich nicht umhin, hier ein für allemal zu begegnen, zumal da hierdurch die Grundidee noch klarer herausgehoben und von einer neuen Seite nachgewiesen wird.

Es könnte gesagt werden, der Versuch, die Sphärengeometrie als eine selbstständige und noch über der Ebenengeometrie stehende Disciplin zu behandeln, zerfalle, so weit derselbe hier durchgeführt ist, durch die That in einen Widerspruch mit sich selbst, weil ja überall längst erwiesene Lehrsätze der Euklideischen Geometrie und der Ebenentrigonometrie, namentlich gleich zu Anfangs eine große Anzahl von Theoremen aus der Lehre von der Lage der Ebenen, in die ganze Darstellung verflochten und der ferneren Entwickelung zum Grunde gelegt, und weil selbst die beiden an der Spitze stehenden Axiome und Postulate nicht absolut als solche, sondern in der Form von Lehrsätzen, deren Beweise gleichfalls der gewöhnlichen Geometrie ihre Begründung verdanken, darin aufgeführt seien. Dieser Einwurf aber kann schon durch die bloße Entgegenhaltung eines andern ganz einfachen Factums aus der Mathematik zurück gewiesen werden. Niemand wird nehmlich der sogenannten Buchstabenrechnung ihren Standpunct über der gewöhnlichen Arithmetik streitig machen, ohne in dieser Ansicht einen Augenblick deshalb unentschieden zu werden, weil gleichwohl die Buchstabenrechnung die lange vorher erwiesenen Constructionsgesetze bestimmter Zeichen, so oft sie derselben beim Gebrauch der bestimmten Coefficien-

Exponenten bedarf, in sich aufnimmt und zu ihrer eignen fernern Begründung unaufhörlich anwendet. Jeder Unbefangene sieht nehmlich, daß es bei der Entscheidung, welche von zwei Disciplinen einen höheren Standpunct einnehme, nicht darauf ankomme, welche von beiden zur Ableitung der andern benutzt werde, weil natürlich, je nachdem die Demonstration synthetisch oder analytisch ist, bald die eine, bald die andere zu diesem Zwecke dienen kann, sondern allein darauf, welche die allgemeinern Resultate liefere. Thut dies die abgeleitete, so ist sie unfehlbar die höhere und die Form der Darstellung ist sodann nothwendig eine rein synthetische. Das eben ist der Fall bei der Sphärik und ihrer Darstellungsweise im gegenwärtigen Lehrbuche, da bekanntlich die trigonometrischen Construktionsformeln der sphärischen Dreiecke zugleich diejenigen der ebenen Dreiecke umfassen; aber eben dieses setzt es zugleich außer Zweifel, daß auch eine Geometrie und Trigonometrie der Sphäre durchaus unabhängig von der der Ebene construirbar sein, und daß letztere wiederum aus jener in der Gestalt eines bloßen Educts, d. h. unter einer analytischen Darstellungsform hervorgehen müsse. Hiemit ist zugleich klar, daß die Axiome und Postulate der höheren Disciplin, als gesteigerte Allgemeinheiten von denen der niedern, bei der synthetischen Darstellung aus letzterer auch einer Demonstration fähig sein müssen, wie sie denn eben in der Einleitung zu diesem Lehrbuche, consequent hiemit, aus der Euklideischen Geometrie nachgewiesen worden sind. Die nehmlichen Sätze müssen hingegen, bei der unabhängigen Darlegung der höheren Disciplin, als absolute Axiome und Postulate an ihrer Spitze stehen, während sodann wiederum bei der analytischen Ableitung der niederen Disciplin aus der höhern, die Grundsätze und Forderungen in jener zu analytischen Folgerungssätzen aus dieser werden. So muß, bei einer absoluten Begründung der Sphärengeometrie, für deren elementarischen Theil der größeste Kreis und jeder Parallelkreis desselben, als die einzigen und unmittelbaren Constructionselemente sich darbieten, der Satz, daß von einem größesten Kreise ein Bogen $< 180°$

die kürzeste Linie zwischen seinen Endpuncten sei, nothwendig als ein Axiom schlechthin da stehen; der analytisch deducirten Ebenengeometrie, als Geometrie einer unendlich großen Sphäre, bleiben sodann die nehmlichen Constructionselemente: die Parallelkreise behalten ihre Natur als Kreise schlechthin, der größeste Kreis hingegen wird zur unendlichen, jeder Bogen von ihm, der kleiner als 180° ist, zur endlichen geraden Linie, und der Satz, daß die endliche gerade Linie die kürzeste Linie zwischen ihren Endpunkten sei, ist sonach schon analytisch mit dem obersten Grundsatz der Sphärengeometrie gegeben. Es ist hiemit zugleich klar, woher der Euklideischen Geometrie der Kreis als ein so schlechthin nothwendiges und unentbehrliches Constructionselement komme, da aus einer höheren Ableitung her die gerade Linie dem Wesen nach mit ihm ein und eben dasselbe oder gleichfalls ein Kreis ist; so wie daraus nicht minder das Bestreben den Kreis aus der Elementarconstruction der Ebenengeometrie zurückzudrängen und zu isoliren, eben so grundlos erscheint, als es zu allen Zeiten unausführlich gewesen ist und bleiben wird.

Eine solche absolut begründete Sphärengeometrie aber, aus der, nach Maßgabe ihrer größern oder geringeren Vollendung, auch die Ebenengeometrie in vollkommnerer Gestalt als wir sie gegenwärtig noch kennen analytisch hervorgehen würde, erwartet noch ihren Schöpfer, oder die Reihe ihrer Schöpfer, wie die Euklideische Geometrie die ihrigen bereits vor Jahrhunderten gehabt hat, und in dieser neuen Schöpfung erwartet zugleich noch die ganze Mathematik ein Organ, das nach mannigfaltigen Richtungen hin den bedeutendsten Einfluß zeigen und der Analysis unfehlbar Gelegenheit verschaffen würde, ihre bewunderungswürdigen und unerschöpflichen Kräfte von einer neuen Seite zu entfalten.

Ich fühle mich noch gedrungen, vor dem Schluß dieser Vorrede, einige Ideen, welche mit der Herausgabe dieses Buchs in näherer Beziehung stehen, zu berühren. Wie die letzten Jahre so viel Schönes und Vortreffliches angeregt haben, so ist [illegible] überall verstärkte Theilnah-

me für die Mathematik und in unserm Staate selbst eine von Oben herab eingeleitete, sorgfältigere Pflege ihres Studiums auf gelehrten Schulen hervor gerufen. So erfreulich dies an sich allerdings ist, so sehr muß man doch wünschen, daß diese plötzlich erwachte Aufmerksamkeit für die Mathematik nicht das Schicksal so vieler Bestrebungen unserer Zeit theilen möge, die, weil sie von ihrer tieferen Bedeutung keine Ahnung haben, nicht selten eine ihrer wahrhaften Natur ganz entgegengesetzte Richtung gewinnen und zu einem leeren, bedenklichen Spiel mit großen, heiligen Gegenständen entarten.

Die Classe derjenigen, welche die Mathematik nur als das an Vortheilen für das praktische Leben ergiebigste Erndtefeld zu schätzen wissen, verdient gar keine Berücksichtigung. Die Mehrzahl glaubt dagegen, der Wissenschaft die höchste Achtung dadurch vollkommen zu Theil werden zu lassen, daß sie dieselbe als das wirksamste und vollkommenste Werkzeug der formalen Verstandesbildung anerkennt und gebraucht. Aber in Beziehung auf die absolute Würde einer durch die Unendlichkeit ihrer Idee allein getragenen und somit über jeden besonderen Zweck hinausreichenden Wissenschaft ist es im Grunde ganz dasselbe, man mag sie als ein bloßes Hebe- und Brechwerkzeug für körperliche Lasten oder für die Schwerfälligkeit individueller Verstandeskräfte betrachten wollen. Für eine höhere Ansicht ist es außer allem Zweifel, daß die Mathematik in ihren beiden Grundfactoren, der Arithmetik und Geometrie, deren jene allein der Zeit, diese allein dem Raume angehört, auch die Grundformen aller besondern zeitlichen und räumlichen Erscheinung, oder den allgemeinen Typus des Werden's und Sein's in sich wiederhole. Sie zeigt zurück auf das ganze Gebiet der empirischen Realwissenschaften, von Seiten der Arithmetik auf das der erzählenden, von Seiten der Geometrie auf das der beschreibenden Wissenschaften: aber indem sie schlechthin kein besonderes mehr, weder der Zeit noch des Raums, sondern allein die absoluten, in aller Mannigfaltigkeit der bestimmten Erscheinung ewig sich gleichbleibenden Formen des Seins

und des Werdens beschaut; hat sie sich gerade in hoher Bedeutsamkeit auf den heiligen Scheideweg gestellt, der das Gemüth aus den Schranken des Endlichen in das ewige, stille Gefilde der Unendlichkeit hinüber führt; sie ist der große Vorhof, welchen jeder einzelne unerläßlich durchwandern muß, der im Heiligthum der Wissenschaften aus der im Endlichen befangenen Betrachtung der Dinge zum höchsten wissenschaftlichen in der Philosophie gegebenen Bildungsziel des Menschen, zur ungetrübten und seeligen Anschauung des innersten Wesens aller Erscheinungen gelangen will. Und eben als dieses Atrium, als dieses die Seele von den Schlacken der sinnlichen Wahrnehmung reinigende, allein zur ursprünglichen Anschauung der ewigen Ideen des Lebens zurückführende Organ hatte der göttliche Platon die Mathematik erkannt und nur in dieser höchsten Beziehung ist die bekannte, von so vielen leider nur in die gemeine Sphäre einer beabsichtigten Schärfung der Urtheilskraft hinabgezogene Inschrift über dem Eingange der Akademie zu deuten.

Es wird unfehlbar eine Zeit kommen, wo die Fülle der unendlich tiefen Bedeutung der Mathematik allseitig in ihr hervorbrechen und auch in ihrer exoterischen Offenbarung zum deutlicheren und bestimmteren Bewußtsein gelangen wird, während die Wissenschaft in ihrer gegenwärtigen Gestalt noch als ein ehrwürdiger Tempel von Hieroglyphen, die das Heilige seines Innern vielmehr ahnen, als bestimmt erkennen lassen, vor unsern Augen dasteht. Aber eben schon diese Ahnung des Höheren, das mehr oder weniger frei gewordene Bewußtsein der Seele, der Unendlichkeit nahe zu treten, ist es, das heute, wie immer, gerade die edleren, ursprünglich schon zum Lichte gewandten Menschen, vorzugsweise zu den Pforten der Mathematik hinzieht und sie zu Priestern der Wissenschaft weiht, die ihr ganzes Leben dem Dienste und der Deutung ihrer heiligen Symbole opfern.

Daher, und einzig und allein aus diesem Grunde, sind auch die Zeichen und Bilder dieser Wissenschaft für die reinen, der Unendlichkeit geöffneten Seelen der Kinder die ursprünglichste und wohlthätigste Nahrung ihrer gei-

ſigen Natur; ſo wie umgekehrt unter einer Zahl von Kindern diejenigen, welche vorzugsweiſe in freudiger Anregung der Führung ihres mathematiſchen Lehrers folgen und muntern Schritts viel eher ihm vorzueilen denn zurück zu bleiben trachten, eben durch die Heiterkeit ihres ganzen Weſens, noch auf die entſchiedenſte Weiſe ihre glückliche Heimath in der Unſchuld verkünden und deutliches Zeugniß geben, daß das keimende Organ einer idealen Anſchauung des Lebens in ihren zarten Seelen noch nicht zerſtört ſei; und von allen Knaben und Jünglingen, die in den gelehrten Schulen vorzugsweiſe der mathematiſchen Unterweiſung eine freudige Theilnahme beweiſen, darf man ſo gut wie ohne Ausnahme vorausſetzen, daß ſie nicht bloß durch hervorſtechende Verſtandesfähigkeiten, ſondern vielmehr nach der ganzen Grundlage ihres Gemüths zu den ſinnigſten, gehaltvollſten und edelſten Naturen gehören; ſie ſind nach einem vom Platon unmittelbar entlehnten in ähnlicher Beziehung ausgeſprochenen Worte: *οἱ ἄριστοι τὰς φύσεις*. Wer mithin in der Mathematik nur einen Vorrath von Formeln und Verſtandeszeichen erblickt, die, an ſich ohne Beziehung auf Herz und Gemüth, höchſtens nur als Uebung des Denkvermögens und zur Entwickelung der Urtheilskraft zu verarbeiten ſeien, dem muß vom Weſen der Mathematik, und vom Geiſte der Platoniſchen Anſicht wenig oder nichts klar geworden ſein.

Nicht als das untergeordnete Werkzeug der formalen Verſtandesbildung alſo, ſondern als höchſtes, ſittliches Mittel, die ganze geiſtige Grundlage des Menſchen vom Irdiſchen fortwährend geſondert und für den Fortſchritt zum äußerſten Ziel wiſſenſchaftlicher Bildung immer freier, ſtärker und geläuterter zu erhalten, und nur als ſolches, kann und muß allein die Mathematik als ein Hauptobject des Unterrichts auf gelehrten Schulen betrieben werden. Aber da überall eben das Höchſte und Heiligſte den Frevel des Mißbrauchs gerade durch die entgegengeſetzten Ergebniſſe rächt und beſtraft, ſo iſt auch hier mit rechtem Sinne darüber zu wachen, daß durch abſpannende Uebermäßigkeit des Gebrauchs und durch übereiltes Hinauftrei-

den des Unterrichts zu den höheren und höchsten Disciplinen der Wissenschaft, diese in der That bei der Jugend nicht das werden möge, was sie leider bei vielen nur ist und für das sie viele nur halten: ein künstlich zusammengesetztes Verstandesspiel mit Zahlen, Figuren und Buchstaben, das, statt den Geist zu erheben, ihn vielmehr in starren Formeln gefangen hält, durch den täuschenden Wahn des Besitzes einer Universalpotenz des Wissens, lächerlichen Pedantendünkel erzeugt und jeden freieren, allseitigen Aufschwung der Seele hindert.

Nichts kann insonderheit bedenklicher und gefährlicher in dieser Hinsicht werden, als die, leider so häufige, zu frühzeitige Einführung des noch unreifen Schülers in das eigentliche Gebiet der Analysis. — Diese Wissenschaft steht auf dem Gipfel aller reflectirten Erkenntniß und vermittelt den Uebergang vom Endlichen zum Absoluten noch ungleich sicherer und inniger, als die Arithmetik und Geometrie, jede für sich, es zu thun vermögen. Denn indem in ihr (der Analysis) das Wesen der Arithmetik, als des idealen, so wenig, wie die Eigenthümlichkeit der Geometrie, als des realen Factors, allein herrschend ist, sondern unverkennbar beide zugleich in gegenseitiger Durchdringung in sie aufgenommen sind, so daß alle durch sie zur Anschauung gebrachten Gesetze, mit rechtem Sinne gefaßt, eben sowohl in der Arithmetik wie in der Geometrie wiederum ihre besondere Realität finden, steht sie in dieser Identität als das nächste symbolische Vorbild der Wissenschaft des Absoluten, als ihr getreuster und nächster Reflex, unmittelbar an deren Schwelle. Es ist auffallend, wie diese Bedeutung der Analysis, bei der durch die neuere Philosophie gewonnenen durchgreifenden Ansicht aller Wissenschaften, so lange hat können übersehen werden, daß sie meines Wissens sonst noch nirgend ausgesprochen ist, während bis dahin immer Arithmetik und Analysis einander ganz fälschlich untergeordnet oder mit einander verwechselt worden sind.

Die Analysis ist mithin die bewunderungswürdigste, zur letzten und lichtesten Höhe hinauf geführte Steigerung der mathematischen Anschauung, und wer den Geist derselben erfaßt hat, der wird es bestätigen, daß beson-

ders von den höheren Theilen derselben jüngere Schüler aus natürlicher Unreife schlechterdings nicht mehr, als höchstens den Buchstaben verstehen können. Ja der ungemein dürftige Nahmen Buchstabenrechnung, welchen dieses Gebiet der Mathematik so lange geführt hat und noch führt, verkündet an und für sich schon, daß die herrschende Ansicht dieser Wissenschaft im Ganzen mehr oder weniger in nichts anderem, als eben nur in dem schülerhaften Ergreifen des Buchstaben bestanden habe. Daher kommt es denn, daß dem in Hast und Angst zur höheren Analysis hin getriebenen Lehrlinge das Ganze derselben, im günstigsten Falle irgend einer gefaßten Ansicht, etwa nur wie ein räthselhafter Talisman erscheint, aus dem sich, ohne Kunde des wie und woher, die seltsamsten Blendwerke entwickeln.

Ich eile dem Schlusse dieser schon über die gewöhnliche Gränze hinausgerückten Vorrede mit der Bemerkung entgegen, daß solchem Mißbrauche meiner Meinung nach nichts besser entgegen zu wirken vermag, als eine solche Behandlung einer geometrischen Disciplin und zwar vornehmlich gerade der Elementarsphärik, worinn, wie es hier geschehen, die geometrische und analytische Construction sich einander parallel gehen und eben dadurch ein wechselseitiges Licht aufeinander werfen, welches dem Schüler das geistige Substrat der Analysis auch für zukünftige, höhere Erkenntnißstufen, auf die sie allein ihn hinaufhebt, sicher zu bewahren vermag. Möchte es mir gelungen sein, besonders auch von dieser Seite etwas nicht unerhebliches geliefert zu haben, so würde ich mich für die keinesweges mühlose Arbeit hinreichend belohnt fühlen. — Materialien zu einer Fortsetzung dieses Werks, welche in einer weiteren Ausführung des geometrischen, wie des analytischen Theils bestehen möchte, habe ich bereits mehrere gesammelt; doch weiß ich nicht, ob theils sehr gehäufte Geschäfte und anderweitige Studien die Muße der Einheit verstatten, theils ob ich derselben, in der Vollständigkeit, wie ich sie mir denke, überhaupt auch gewachsen sein werde. Stettin, im December 1828.

Pohl.

Inhalt.

I. Geometrie auf der Sphäre.

Grundlehren. — Seite 3.
Erste Andeutung der Sphärik. §. 1 — 4. Elementarbegriffe und Lehrsätze. §. 5 — 9. Entschiedene Definitive der Sphärengeometrie. §. 10.

Sphärische Winkel und Figuren im Allgemeinen. §. 10 — 12. — 18.

Das sphärische Zweieck. §. 13. — 26.

Das sphärische Dreieck. §. 14. — 28.

Grundeigenschaften des sphärischen Dreiecks. — 31.
Beziehung auf Kugelsectoren. §. 15. — Gegendreieck. — Identität statt Congruenz in der Sphärik. — Nebendreiecke und Seitendreiecke. §. 16. — Polardreieck. §. 17. — Natur des sphär. Dreiecks in Hinsicht auf allgemeine Größenverhältnisse seiner Elemente. §. 18.

Die vier ersten Kennzeichen der Identität sphärischer Dreiecke und damit in Verbindung stehende Lehren. — 42.
Erstes und zweites Kennzeichen nebst Folgerungen. §. 19 — 22. — Bedingungen unter welchen zwei Sphärenkreise sich schneiden, berühren oder gar keinen Punct gemein haben, als Prämissen des dritten Kennzeichens. §. 23. — Drittes Kennzeichen nebst mannigfaltigen Folgerungen und Aufgaben. §. 24 — 27. — Viertes Kennzeichen. §. 28.

Eigenschaften der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke. §. 29 — 33. — 64.

Eigenschaften der sphärischen Quadrantendreiecke. §. 34. — 81.

Fortgesetzte Betrachtung der allgemeinen Eigenschaften sphärischer Dreiecke. — 84.
Perpendikel und Quadranten an sphär. Dreiecken. §. 35 — 36. — Vergleichung der Winkel mit den Seiten und umgekehrt. §. 37.

Das fünfte Kriterium der Identität sphärischer Dreiecke. §. 38. — 93.

Das sechste Kriterium der Identität sphär. Dreiecke. §. 39. — 108.

Vergleichung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks mit der ganzen Kugelfläche. §. 40. — 123.

Sphärische Vier- und Vielecke und die Vergleichung ihres Flächeninhalts mit der Kugelfläche. §. 41. — 125.

II. Trigonometrie auf der Sphäre.

Einleitung. — Begriff und allgemeine Methode. §. 1 — 4. — 129.

Auflösung der Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Elementen eines sphär. Dreiecks ein rechter Winkel sich befindet. — 133.
Vorrichtungen. §. 5. — Nepersche Grundregeln. §. 6. — Auflösung aller hieher gehörigen Fälle. §. 7.

Auflösung der Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Elementen ein Quadrant sich befindet. §. 8. . . Seite 149.
Auflösung der Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Elementen kein rechter Winkel und kein Quadrant vorkomt — 151.
Vorrichtungen. §. 9—11. — Auflösung sämmtlicher Fälle mittelst Hülfsperpendikel oder Hülfsquadranten. §. 12—17. — Entwickelung der drei Winkel aus den drei Seiten und umgekehrt ohne Gebrauch des Hülfsperpendikels. §. 18.
Allgemeine analytische Auflösung aller bisher abgehandelten Aufgaben. . . . . — 194.
Gebrauch der Vorzeichen zur Bestimmung der Art der Quäsite und Zurückführung des Hauptproblems auf die Formation von vier Grundgleichungen. §. 19. — Trigonometrische Formeln. §. 20. — Construction der vier Grundgleichungen, Ableitung und Bedeutung der mit ihnen gegebenen Normalformeln. §. 20—23. — Modification und Anwendung der Formeln zur logarithmisch-trigonometrischen Auflösung sämmtlicher Aufgaben. §. 24—36.
Sammlung numerischer Aufgaben und ihrer Auflösungen. — 227.

III. Tafeln zur Berechnung sphärischer Dreiecke.

Tafel I. Zur Berechnung sphär. Dreiecke, wenn unter den Datis ein rechter Winkel oder Quadrant enthalten ist.
Tafel II. bis VII. Zur Berechnung sphär. Dreiecke, wenn unter den Datis kein rechter Winkel und kein Quadrant vorkommt.
Tafel VIII. Zur Berechnung aller Arten sphär. Dreiecke mittelst analytischer Formeln, welche die Art der Quäsite durch Vorzeichen zu erkennen geben.

Die

Die Geometrie auf der Sphäre.

Grundlehren.

§. 1.

Die Linie im Allgemeinen besteht in dem stetigen Fortschreiten eines Puncts durch die Unendlichkeit des Raums. Dieses Gemeinsame erscheint am reinsten und zwar unter einem Gegensatze, der hier so wie bei der Versichtbarung einer jeden Idee statt findet, in der geraden Linie und der Kreislinie. Die Bewegung des Puncts in der geraden Linie ist ein unaufhörlich gleichmäßiges Hinausgehen aus sich selber, ein Fliehen seiner selbst; die Bewegung in der Kreislinie dagegen ein stets gleichmäßiges Zurückkehren in sich selber, ein Suchen seiner selbst; jene stellt eine schlechthin äußere, diese eine innere, in sich abgeschlossene Unendlichkeit dar.

§. 2.

Wie im Allgemeinen die Linie in der Bewegung eines Puncts gegeben ist, so ist das Gemeinsame in der Erscheinung der Fläche wieder die stetig fortschreitende Bewegung einer Linie nach einer von der Bewegungsrichtung ihres Erzeugungspuncts verschiedenen Dimension des Raums. Und zwar entsteht die ebene Fläche, oder die Ebene, wenn eine gerade Linie sich so bewegt, daß jeder der von ihrem Erzeugungspunct durchlaufenen Puncte aufs neue wieder eine gerade Linie beschreibt; dagegen entspringt die Kugelfläche oder die Sphäre * aus derjenigen Bewegung der Kreislinie, vermöge welcher diese um einen ihrer Durchmesser herumgeführt, mithin, der Construction der geraden Linie analogisch, so bewegt wird, daß jeder der von dem Erzeugungspunct der Kreislinie durchlaufenen Puncte selbst wieder eine neue Kreislinie beschreibt.

* Das Wort wird hier und in der Folge immer nur als Zeichen der Fläche, ohne Rücksicht auf den kubischen Raum der Kugel, gebraucht.

§. 3.

Die Ebene und Sphäre bilden daher wieder den einfachsten Ausdruck der Idee der Fläche und zwar gleichfalls unter einem solchen Gegensatze, daß die Ebene ein nach allen Seiten hingerichtetes gleichmäßiges Hinaustreten aus sich selber, die Sphäre dagegen ein von allen Seiten her strebendes Zurückgehen in sich selber darstellt.

§. 4.

Dieser Gegensatz veranlaßt zugleich eine Entgegensetzung in der Wissenschaft. Der Geometrie auf der Ebene, der Ebenengeometrie *, tritt die Geometrie auf der Sphäre, die Sphärengeometrie, als eine eben so wichtige und selbstständige Disciplin der Mathematik gegenüber, so daß in ihr die Sphäre eben das wird, was in jener die Ebene ist, nehmlich die allgemeine Basis, das durchgehends zum Grunde liegende Constructionsfeld. Es kommt demnach zuvörderst darauf an, die Sphärengeometrie in ihrer, durch diesen Gegensatz zur Ebenengeometrie bedingten Eigenthümlichkeit der Idee nach vollständig zu bestimmen, und diese Entwickelung, vereinigt mit der Darstellung der zum Ganzen gehörigen Grundbegriffe, macht den Inhalt des gegenwärtigen ersten Abschnittes aus.

* Die gewöhnlichen Ausdrücke: „ebene Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie" sind offenbar eben so verwerflich, wie die früherhin gleichfalls gangbare Bezeichnung: „körperliche Geometrie;" wie für letztere jetzt allgemein die richtige Zusammensetzung: „Körpergeometrie" gebraucht wird, so sind hier die dem Sprachgebrauche angemessenen Verbindungen: „Ebenengeometrie, Sphärengeometrie," desgleichen: „Ebenentrigonometrie, Sphärentrigonometrie" aufgenommen worden. Das allgemeinere Wort: „Sphärik" drückt füglich den Inbegriff der Sphärengeometrie und Sphärentrigonometrie zugleich aus."

§. 5.

Jeder Punct der Sphäre ist vermöge ihrer Construction zugleich als ein Punct aus der Peripherie ihres Erzeugungskreises zu betrachten, die Entfernungen der Sphärenpuncte vom Mittelpuncte des Erzeugungskreises der Sphäre sind daher sämmtlich gleich; der Mittelpunct dieses Erzeugungskreises ist somit auch der Mittelpunct der Sphäre, jede gerade Linie von diesem Puncte bis zu einem Sphärenpuncte ist ein Halbmesser, jede gerade Linie von einem Sphärenpuncte durch das Centrum bis zu einem entgegengesetzten Sphärenpuncte ist ein Durchmesser der Sphäre und ihres Erzeugungskreises zugleich, und alle Halbmesser, so wie alle Durchmesser derselben Sphäre sind mithin gleich groß.

§. 6.

1. Wenn eine Ebene die Sphäre durchschneidet, ohne durch deren Mittelpunct c zu gehen, so ist der Durchschnitt fghk ein Kreis, welcher kleiner als der Erzeugungskreis und zwar um so kleiner ist, je weiter die schneidende Ebene vom Sphärencentrum c entfernt ist. Fig. 1.

Denn diese Entfernung wird durch eine von c auf die Durchschnittsebene senkrecht gezogene gerade Linie cl ausgedrückt, die begreiflich, als die kürzeste unter allen von c nach jener Ebene gezogenen Geraden auf einen im innern kubischen Raum der Sphäre liegenden Punct l der Ebene fallen muß. Alle Geraden aber, lf, lg, lh, lk u. s. w. zwischen l und der Durchschnittslinie, sind gleich, denn jede derselben, wie lg, ist nach d. Pythag. Lehrs. die Seite eines Quadrats, welches den Ueberschuß vom Quadrate des Sphärenradius cg über das Quadrat des Lothes cl, bildet; also ist fghk ein Kreis, zu welchem lg, lh u. s. w. als Radien gehören, er ist kleiner als der Erzeugungskreis, weil dessen Halbmesser die Seite des Quadrats des Sphärenradius, nehmlich der Sphärenradius selber ist, (§. 5) und zwar ist er um so kleiner als der Erzeugungskreis, je weiter die schneidende Ebene vom Mittelpuncte entfernt, d. h. je größer cl ist, weil jenes Ueberschußquadrat und dessen Seite um so kleiner ausfallen muß, je größer mit cl dessen Quadrat gegen das sich immer gleich bleibende Quadrat des Sphärenhalbmessers wird.

2. Daß die Senkrechte cl aus dem Sphärencentrum c auf die Ebene des auf der Sphäre befindlichen Kreises fghk durch dessen Mittelpunct l gehen müsse, liegt unmittelbar in vorstehendem Beweise. Damit ist aber auch umgekehrt klar, daß die aus dem Mittelpunct l eines solchen Kreises fghk auf dessen Ebene senkrecht errichtete Gerade lq stets durch das Sphärencentrum c gehen und daß wiederum auch die Gerade cl zwischen dem Mittelpunct der Sphäre und dem des Kreises fghk auf des letzteren Ebene senkrecht sein müsse, weil auf demselben Puncte derselben Ebene nur eine und dieselbe gerade Linie senkrecht sein kann.

3. Wenn eine Ebene die Sphäre so durchschneidet, daß sie zugleich durch deren Mittelpunct c geht, so ist der Durchschnitt ands allemal ein dem Erzeugungskreise der Sphäre gleicher Kreis, weil alle in der Durchschnittsebene von c bis zur Durchschnittslinie gezogenen Geraden, ca, cn, cd u. s. w. Radien der Sphäre und des Erzeugungskreises zugleich sind. (§. 5).

4. Jeder Kreis auf der Sphäre, welcher dem Erzeugungskreise derselben gleich ist, heißt in der Folge ein Normalkreis * der Sphäre.

Alle Normalkreiſe einer Sphäre ſind daher gleich groß und die Ebene eines jeden derſelben muß durch das Sphärencentrum gehen, weil im entgegengeſetzten Fall der Kreis kleiner als der Erzeugungskreis (1), mithin gar kein Normalkreis ſeyn würde.

Dagegen muß die Ebene eines jeden, der Größe nach von einem Normalkreiſe verſchiedenen auf der Sphäre befindlichen Kreiſes nicht durch das Sphärencentrum gehen, weil im entgegengeſetzten Fall der Kreis dem Erzeugungskreiſe gleich (3), alſo, im geraden Widerſpruch mit der Vorausſetzung, ein Normalkreis ſein würde.

Eben daher muß auch jeder der Größe nach von einem Normalkreiſe verſchiedene auf der Sphäre befindliche Kreis kleiner, als der Normalkreis derſelben Sphäre ſein (1), und ein Normalkreis heißt daher auch ein größeſter Kreis der Sphäre.

Ein Kreis auf der Sphäre, welcher kein Normalkreis, alſo kleiner als ein ſolcher iſt, heißt ein Nichtnormalkreis; durch das Wort Sphärenkreis ſchlechthin aber kann eben ſowohl ein Normalkreis wie ein Nichtnormalkreis der Sphäre bezeichnet werden.

* Die jetzt mögliche Kürze in dem einen Terminus: „Normalkreisbogen" für die ſonſt vierwortige Bezeichnung des häufig vorkommenden Begriffs: „Bogen eines größeſten Kreiſes" (gewöhnlich falſch und dennoch beſchwerlich durch die Worte: „größeſter Kreisbogen" ausgedrückt) wird die Einführung des Wortes: „Normalkreis" rechtfertigen.

5. Zwei Normalkreiſe pbqe, paqd derſelben Sphäre müſſen ſich mit ihren Peripherien ſtets in zwei Sphärenpuncten p und q ſchneiden und ſich gegenſeitig halbiren; denn da beider Ebenen durch das Sphärencentrum c gehen, ſo geht ihre Durchſchnittslinie pq ebenfalls durch c, und iſt folglich, da c zugleich der Mittelpunct der Kreiſe iſt, ein ſie beide gemeinſchaftlich halbirender Durchmeſſer.

6. Umgekehrt muß von zwei ſich gegenſeitig halbirenden Sphärenkreiſen jeder einzelne ein Normalkreis ſeyn. Denn offenbar wird zu einer ſolchen wechſelſeitigen Halbirung gleiche Größe und ein gemeinſchaftlicher Durchmeſſer beider Kreiſe erfordert. Ein Normal- und Nichtnormalkreis der Sphäre können ſich alſo ſchon darum niemals beiderſeitig halbiren; ſetzt man aber, daß zwei Nichtnormalkreiſe akbl, afbg an dem gemeinſchaftlichen Durchmeſſer ab ſich gegenſeitig halbirten, ſo wäre die Mitte m von ab das gemeinſchaftliche Centrum beider Kreiſe und die Gerade cm zwiſchen dem Sphären- und jenem gemeinſchaftlichen Mittelpuncte müßte folglich (2) auf den ſich ſchneidenden Ebenen beider Kreiſe zugleich ſenkrecht ſtehen, welches ein die Annahme zurückweiſender Widerſpruch iſt.

Fig. 2.

7. Durch jede zwei Puncte d und e der Sphäre, die mit dem Mittelpunct c der letzteren in gerader Linie liegen, also die Endpuncte eines Sphärendurchmessers de sind, kann eine unendliche Zahl der Lage nach verschiedener Normalkreise, wie bdae, fdle u. s. w. aber kein einziger Nichtnormalkreis hindurch gehen. Denn durch d und e kann man sich eine Ebene in unendlich verschiedenen Lagen hindurch gelegt vorstellen, die also auch unendlich viel der Lage nach verschiedener Sphärenkreise geben wird; da aber vermöge der Bedingung die Ebene eines jeden dieser Kreise durch den mit d und e in gerader Linie liegenden Sphärenmittelpunct c gehen muß, so muß auch jeder derselben ein Normalkreis seyn (3).

8. Durch jede zwei Puncte a und b der Sphäre, die mit dem Centrum c der letzteren nicht in gerader Linie liegen, also nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, kann stets ein Normalkreis der Sphäre, aber auch nur ein einziger, bdae hindurch gehen; durch dieselben Puncte a und b können aber zugleich noch unzählig viel der Lage und Größe nach verschiedene Nichtnormalkreise, wie afbg, ahbi, akbl u. s. w. hindurch gehen. Denn wenn durch a und b eine Ebene hindurch gelegt wird, daß sie zugleich durch c geht, so bildet sie auf der Sphäre den Normalkreis bdae (3); verläßt die Ebene den Punct c, so kann sie, um ab sich drehend, die Sphäre in unzählig verschiedenen Lagen und Entfernungen von c durchschneiden, also auch unzählig viel der Lage und Größe nach verschiedene Sphärenkreise geben (1), die alle durch a und b gehen, von denen aber, weil ihre Ebene nicht durch c geht, kein einziger ein Normalkreis seyn kann.

9. Durch jede zwei Sphärenpuncte a und b, wenn sie nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, ist also die Lage eines Normalkreises bdae völlig bestimmt und von den dabei durch beide Puncte begränzten Bogen adb, aeb des Normalkreises muß der eine kleiner, der andere größer als der halbe Normalkreis seyn; denn wenn beide gleich wären, so wären a und b die Endpuncte eines Normalkreis- mithin auch eines Sphärendurchmessers, gegen die Voraussetzung.

§. 7.

1. Die aus dem Mittelpunct l eines Sphärenkreises fghk auf dessen Ebene senkrecht gezogene und bis zu den beiden gegenüberstehenden Sphärenpuncten verlängerte gerade Linie pq heißt die Achse und ihre Endpuncte p und q auf der Sphäre heißen die Pole des Sphärenkreises fghk. — Die Achse eines jeden Sphärenkreises ist daher zugleich ein Sphärendurchmesser, und umgekehrt muß ein Sphärendurchmesser, der entweder auf die Ebene eines Sphärenkreises senkrecht Fig. 1.

oder durch einen Pol desselben gezogen ist, stets die Achse desselben Kreises sein (§. 6, 2).

2. Zwei oder mehr Sphärenkreise fghk, abde, deren Ebenen parallel sind, heißen Parallelkreise. — Dergleichen Kreise müssen also immer eine gemeinschaftliche Achse pq und somit auch gemeinschaftliche Pole p und q haben, weil die Achse stets durch das Sphärencentrum c geht und aus demselben Puncte c auf parallele Ebenen nur eine und dieselbe senkrechte Gerade statt findet. — Umgekehrt müssen Sphärenkreise, wenn sie einerlei Achse oder Pole haben, Parallelkreise seyn, weil verschiedene auf einer und derselben Geraden senkrechte Ebenen allemal parallel sind.

3. Wenn ein Normalkreis pbqe durch einen Pol p eines Sphärenkreises fghk hindurch geht, so muß er, weil seine Ebene zugleich durch das Sphärencentrum c geht (§. 6, 4), auch durch den andern Pol q desselben Kreises und folglich mit seiner Ebene auch durch die Achse pq und den Mittelpunct l von jenem hindurch gehen, mithin auch senkrecht auf ihm stehen und ihn halbiren.

4. Wenn umgekehrt ein Normalkreis pbqe mit seiner Ebene auf der eines andern Sphärenkreises fghk senkrecht steht, so muß jener mit seiner Peripherie durch beide Pole p und q, und mit seiner Ebene durch die Achse pq und den Mittelpunct l des letzteren gehen und ihn halbiren. Denn da die auf fghk senkrechte Normalkreisebene durch c geht und durch c zugleich die auf fghk ebenfalls senkrechte Achse pq geht, so muß pq in der Normalkreisebene liegen, oder diese durch pq hindurch gehen, womit alles übrige, so wie vorhin in 3, klar ist.

5. Desgleichen muß ein Normalkreis pbqe, wenn derselbe die Peripherie eines Nichtnormalkreises fghk, in den Puncten g und k, halbirt, durch beide Pole p und q des letzteren, also auch mit seiner Ebene durch dessen Achse pq hindurch gehen und senkrecht auf ihm stehen. Denn vermöge der Voraussetzung ist die Durchschnittslinie gk der Kreisebenen ein Durchmesser des Nichtnormalkreises und die Normalkreisebene geht also, indem sie zugleich durch c und den Mittelpunct l des Nichtnormalkreises hindurch geht, auch durch dessen Achse pq, womit das übrige so wie in 3 evident ist.

6. Wenn von zwei Normalkreisen der eine durch einen und darum auch durch den andern Pol des zweiten Normalkreises hindurch geht, so geht auch dieser zweite Normalkreis wiederum zugleich durch beide Pole des ersten und beider Kreise Ebenen stehen senkrecht auf einander (3). — Und wenn umgekehrt zwei Normalkreise

mit ihren Ebenen senkrecht aufeinander stehen, so gehen sie gegenseitig einer durch des andern Achse und Pole (4).

7. Wenn zwei Normalkreise pbqe, pnqs mit ihren Ebenen auf eines dritten Sphärenkreises fghk Ebene senkrecht stehen, so müssen jener Durchschnittspuncte p und q die Pole dieses Kreises fghk sein. Denn da die beiden Normalkreise gemeinschaftlich durch die Pole des dritten Kreises gehen müssen (4), und außer ihren beiden Durchschnittspuncten keinen andern Punct der Peripherie mit einander gemein haben können (§. 6, 5), so müssen diese Durchschnittspuncte die Pole des dritten Kreises sein.

8. Wenn drei oder mehr Normalkreise, pbqe, pnqs, paqd sich in zwei Puncten p und q gemeinschaftlich durchschneiden, so müssen die Pole aller dieser Kreise in der Peripherie eines einzigen Normalkreises ands liegen. Denn ihre Ebenen gehen verm. der Bedingung durch denselben Sphärendurchmesser pq (§. 6, 5), welcher die Achse des mit seiner Ebene senkrecht auf ihm stehenden Normalkreises ands ist. Es steht daher auch ein jeder von jenen Normalkreisen auf ands senkrecht, und dieser geht mithin (6) durch eines jeden Pole.

9. Jeder Normalkreis pbqe theilt die ganze Sphäre in zwei congruente Hemisphären. Denn wenn seine Ebene mit einer andern in irgend einer geraden Linie gk senkrecht durchschnitten wird, so entstehen auf der Sphäre zwei congruente Halbkreise ghk, gfk (4), und da dies überall geschieht, in welcher Geraden gk, be u. s. w. die Normalkreisebene auch durchschnitten werden mag, so sind die durch den Normalkreis geschiedenen Theile der Sphäre in allen Puncten congruent.

§. 8.

1. Wenn durch zwei Sphärenpuncte a und b, welche nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, der seiner Lage nach durch sie bestimmte Normalkreis bdae gezogen ist, so ist der zwischen denselben Puncten a und b liegende Bogen, adb, desselben, welcher kleiner als der halbe Normalkreis ist (§. 6, 9), stets kürzer, als jeder zwischen eben den Puncten auf der Sphäre befindliche Nichtnormalkreisbogen ahb, afb u. s. w. Fig. 2.

Denn die Ebene aller durch a und b gehenden Nichtnormalkreise durchschneiden sich in der Geraden ab und bilden eben so viel Kreissegmente, akb, ahb, afb u. s. w. von denen dasjenige, ahb, welches auf der Ebene des Normalkreises adbe senkrecht steht, ein Halbkreis sein muß (§. 7, 4), dessen Durchmesser

folglich ab, dessen Radius am = bm und dessen Mittelpunct m ist. Die Gerade cm steht also senkrecht auf der Ebene des Halbkreises ahb (§. 6, 2), und wird, gehörig verlängert, die Achse de desselben (§. 7, 1). Es sei nun noch in der Ebene ahb der Radius mh senkrecht auf ab gezogen und durch de und mh sei eine Ebene gelegt, dieweil sie durch c geht und vermöge der Construction auf der Durchschnittslinie ab aller Segmente senkrecht steht, einen Normalkreis dfel geben muß, dessen Ebene die Ebenen aller Segmente in der auf ab senkrechten Geraden mk, mh, mf u. s. w. senkrecht durchschneidet. Jede dieser Durchschnittslinien ist folglich die Höhe desjenigen Segments, in dessen Ebene sie sich befindet und muß in die Richtung der Geraden md fallen, wenn das zugehörige Segmens um ab bis in die Ebene adb herum gedreht wird.

Es muß aber die Gerade md stets kleiner als der Sphärenradius cd seyn, weil der Bogen adb kleiner als der halbe Normalkreis ist, folglich wird auch ein Kreis dnopq, den man mit dem Radius md aus m in der Ebene des Normalkreises dfel beschreibt, ganz innerhalb des letzteren fallen, indem er ihr bloß in d berührt, und die Peripherie dieses beschriebenen Kreises wird mithin alle jene in der Ebene des Normalkreises dfel befindliche Höhenlinien mk, mh, mf der Segmente irgendwo in n, o, p u. s. w. durchschneiden, so daß jede dieser Geraden offenbar um dasjenige Stück nk, oh, pf u. s. w., welches zwischen beiden Berührungskreisen liegt, größer als md seyn, folglich mit ihrem Endpuncte über d hinaus, z. B. in r, fallen muß, wenn das zugehörige Segment um ab herum bis in die Ebene adb gedreht wird, in welcher Lage es klar ist, daß der demselben Segment zugehörige Bogen des Nichtnormalkreises größer als der Normalkreisbogen adb ist, weil jener weiter als dieser von der zwischen beiden Endpuncten liegenden geraden Linie ab abweicht.

2. Der Normalkreisbogen, welcher kleiner als ein Halbnormalkreis ist, ist daher unter allen zwischen seinen Endpuncten auf der Sphäre möglichen Linien die kürzeste. Denn wenn schon jeder zwischen diesen Puncten liegende Bogen eines Nichtnormalkreises größer als der Normalkreisbogen ist, so ist es offenbar noch viel mehr jede zwischen denselben Puncten auf der Sphäre gezogene Linie, die gar kein Kreisbogen ist.

3. Die Entfernung zweier Puncte auf der Sphäre, welche nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, wird also stets durch den zwischen ihnen befindlichen Normalkreisbogen, welcher kleiner als ein Halbnormalkreis ist, ausgedrückt. Die Entfernung zweier Puncte auf der Sphäre aber, welche die

Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, ist das Maximum aller auf der Sphäre möglichen Entfernung, weil jeder zwischen solchen Puncten befindliche Sphärenkreisbogen ein Halbnormalkreis ist (§. 6, 7), und die Entfernung jeder zwei andern Sphärenpuncte, welche nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, stets durch einen Bogen, welcher kleiner als ein Halbnormalkreis ist, bestimmt wird.

§. 9.

1. Der Pol p eines Sphärenkreises a b d f ist von allen Puncten a, b, d u. s. w. in der Peripherie des letzteren gleich weit entfernt. Fig. 3

Denn die Ebenen aller durch p gehenden Normalkreise, deren Bogen p a, p b, p d u. s. w. die Entfernung des Pols p von den Puncten in der Peripherie des zugehörigen Kreises a b d f ausdrücken, durchschneiden sich in der Achse p q dieses Kreises, stehen auf seiner Ebene senkrecht und gehen durch seinen Mittelpunct e (§. 7, 3). Es sind also p a g q, p b h q, p d l q u. s. w Halbnormalkreise, die, wenn sie um p q herum gedreht werden, so daß sie in eine Ebene fallen, nicht nur congruiren, sondern in denen, wegen der rechten Winkel in e und bei der Gleichheit der dem Kreise a b d f zugehörigen Radien e a, e b, e d u. s. w. auch die Puncte a, b, d u. s. f. sich decken werden, daß mithin auch die Bogen p a, p b, p d u. s. w. congruent sein, oder die Puncte a, b, d u. s. f. von p gleich weit entfernt sein müssen.

2) Wenn ein Sphärenpunct q von allen Puncten g, h, l u. s. w. einer Linie g h l m auf der Sphäre gleich weit entfernt ist, so muß diese Linie ein Sphärenkreis oder Sphärenkreisbogen und der Punct q der zugehörige Pol seyn.

Denn es sey aus q durch das Sphärencentrum c der Durchmesser p q gezogen und durch ihn seien die Ebenen der Normalkreise q g a p, q h b q, q l d p hindurch gelegt, deren Peripherien die gegebene g h l m irgendwo in den Puncten g, h, l schneiden. Von einem dieser Durchschnittspuncte g sey auf p q die Senkrechte g i gezogen und es werde i mit den übrigen Durchschnittspuncten durch die Geraden h i, l i verbunden. — Es fällt nun i entweder mit dem Sphärencentrum c zusammen oder liegt außerhalb desselben. Es finde zunächst das letztere statt. Da nun vermöge der Voraussetzung die Normalkreisbogen q a g, q r h, q s l gleich sind, so sind auch ihre Sehnen q g, q h, q l gleich und da überdies c g = c h = c l, so sind die Dreiecke c g q, c h q, c l q, deren Winkel in q, die Dreiecke g i q, h i q, l i q und deren Winkel in i congruent. Da also g i auf p q senkrecht ist, so liegen g i, h i, l i, so wie alle von allen übrigen Puncten der gegebenen g h l m nach i gezogenen

Geraden in einer und derselben auf pq senkrechten Ebene; es ist folglich ghlm als die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Sphäre, ein Sphärenkreis oder Sphärenkreisbogen (§. 6, 1), dessen Achse pq und dessen Pol der Punct p ist (§. 7, 1). — Fällt i in c, so ist ohne weiteres gi=hi=li und aus denselben Gründen wie vorhin liegen alle Puncte in ghlm in einer und derselben für diesen Fall durch das Sphärencentrum c gehenden auf pq senkrechten Ebene, daß also ghlm auch jetzt die ganze Peripherie oder der Bogen eines Sphärenkreises, nehmlich eines Normalkreises mit dem zugehörigen Pol p sein muß.

3. Wenn also ein Normalkreisbogen qng um seinen einen Endpunct q, so daß dieser und alle übrigen Puncte des Bogens stets in der Sphäre bleiben, sich herum bewegt, so beschreibt der andere Endpunct g einen Sphärenkreis oder Sphärenkreisbogen ghlm, dessen Halbmesser auf der Sphäre der Bogen qng und dessen Mittelpunct auf der Sphäre der Punct q seyn wird, der zugleich der Pol des beschriebenen Kreises oder Bogens ist.

Jeder Sphärenkreis oder Sphärenkreisbogen ist umgekehrt als ein auf die so eben erkannte Weise entstandener zu betrachten, so daß ein Pol desselben als sein Mittelpunct auf der Sphäre und der zwischen diesem und irgend einem Punct der Peripherie befindliche Normalkreisbogen als sein Halbmesser auf der Sphäre anzusehen ist. — Da aber zu jedem Sphärenkreise abdf zwei verschiedene Pole p und q gehören, so gehört derselbe auch mit zwei verschiedenen Radien auf der Sphäre zusammen, von denen der eine, pa, des einen Pols p, der andere qga des andern Pols q Entfernung von der Kreisperipherie ausdrückt. Durch einen wie den andern dieser Radien ist indeß der Kreis stets völlig bestimmt, indem beide sich jedesmal zu einem Halbnormalkreis ergänzen, womit zugleich klar ist, daß jeder Radius auf der Sphäre kleiner als ein Halbnormalkreis sein muß.

Fig. 1. 4. Der Pol p, q eines Normalkreises ands ist von jedem Punct in der Peripherie des letzteren um einen Viertelnormalkreis phd, qrd entfernt; oder: von den beiden mit einem Normalkreise ands zusammengehörigen Radien auf der Sphäre ist ein jeder, phd, qrd ein Viertelnormalkreis.

Denn wenn phd durch p bis zum entgegengesetzten Punct a der Peripherie des Normalkreises ands verlängert wird, so ist dhpfa ein Halbnormalkreis (§. 6, 5), folglich (verm. 1) phd=pfa=qrd ein Viertelnormalkreis.

5. Wenn umgekehrt ein Pol p und mithin auch der andere q um einen Viertelnormalkreis phd=qrd von jedem Punct in der Peripherie des zugehörigen Sphärenkreises ands entfernt ist; oder: wenn von den beiden zum Sphärenkreise

ands gehörigen Radien auf der Sphäre jeder ein Viertelnormalkreis ist, so muß der Sphärenkreis ands selbst ein Normalkreis sein.

Denn wenn phd durch p bis in a verlängert wird, so ist von den Bogen and, asd jeder die Hälfte des Sphärenkreises ands; (§. 7, 3); es ist aber auch, verm. der Voraussetzung, der Bogen dhpfa ein Halbnormalkreis und es muß mithin, nach §. 6, 6 auch ands ein Normalkreis sein.

6. Wenn übrigens ein Sphärenpunct p nur von zwei in der Peripherie eines Normalkreises ands befindlichen, mit dem Sphärencentrum nicht in gerader Linie liegenden Puncten b und n um einen Viertelnormalkreis pgb=pmn entfernt ist, so muß dieser Punct p auch von allen übrigen Puncten des Normalkreises ands um einen Viertelnormalkreis entfernt, d. h. er muß der zu ands gehörige Pol sein.

Denn es sey aus p durch das Sphärencentrum c der Durchmesser pq, und in der Ebene des Normalkreises ands seien die Radien cb, cn gezogen, so liegen zugleich die Geraden cb, cp in des ersteren, cn, cp in des andern Quadranten Ebene und vor den Winkeln pcb, pcn ist mithin jeder ein rechter; pq steht folglich, da verm. der Voraussetzung b, c und n nicht in gerader Linie liegen, auf zwei verschiedenen geraden Linien cb, cn der Normalkreisebene ands und somit auf dieser Ebene selbst senkrecht und es ist folglich pq die Achse und ihr Endpunct p der Pol des Normalkreises ands (§. 7, 1).

7. Wenn ferner die Ebene eines Viertelnormalkreises pgb auf der Ebene eines Normalkreises oder Normalkreisbogens ands senkrecht steht, so ist der Endpunct p des Quadranten pgb der Pol des andern Kreises oder Bogens ands.

Denn da der mit dem Quadranten zusammengehörige Kreis durch den Pol des Kreises ands geht (§. 7, 6), und dieser Pol von n um einen Normalkreis-Quadranten entfernt ist (4), so muß eben der Endpunct p des Quadranten pgb dieser Pol sein.

8. Wenn hingegen die Ebene eines Viertelnormalkreises hn schief auf der eines andern Normalkreises ands steht, so kann der Endpunct h des Quadranten niemals ein Pol von ands sein; weil das Gegentheil dem §. 7, 6 widerstreitet.

Eben sowohl muß auch jedesmal der Endpunct b eines Normalkreisbogens bn, der mit seiner Ebene zwar senkrecht auf der eines andern Normalkreises pnqs steht, aber kein Quadrant ist, von dem zu pnqs gehörigen Pol verschieden sein; denn sonst wäre dieser Pol nicht von allen Puncten in pnqs um einen Viertelnormalkreis entfernt, gegen Satz 4.

9. Die Entfernung der beiden Pole p und q eines Nichtnormalkreises fghk von dessen Peripherie ist ungleich, oder: von den beiden mit einem Nichtnormalkreise fghk zusammen gehörigen Radien auf der Sphäre ist der eine, ph kleiner, der andere qrh größer als ein Viertelnormalkreis.

Denn wenn beide gleich wären, so müßte fghk, der Voraussetzung entgegen, ein Normalkreis sein (5).

10. Wenn umgekehrt der Abstand beider Pole p und q von der Peripherie eines Sphärenkreises fghk ungleich ist, oder: wenn beide mit dem Sphärenkreise fghk zusammen gehörige Radien auf der Sphäre an Größe verschieden sind, der eine ph kleiner, der andere qrh größer als ein Viertelnormalkreis, so muß der Sphärenkreis fghk ein Nichtnormalkreis sein.

Denn im entgegengesetzten Fall könnten die Radien ph, qrh nicht ungleich sein (4).

Fig. 4. 11. Jeder Normalkreisbogen are, der die Peripherie eines Nichtnormalkreises flgm in zwei Puncten a und e schneidet, kann eine zu letzterem gehörige Sehne auf der Sphäre genannt werden, und wenn er, wie lpm, zugleich durch den Pol oder Mittelpunct p des Nichtnormalkreises geht, so kann er insbesondere ein Durchmesser auf der Sphäre für denselben Sphärenkreis flgm heißen.

Jeder Durchmesser auf der Sphäre theilt daher die Peripherie des zugehörigen Nichtnormalkreises in gleiche Hälften oder Halbkreise (§. 7, 3); jede andere Sehne aber theilt die Peripherie in ungleiche Stücke, weil sie, wenn das Gegentheil statt fände, durch den Pol gehen (§. 7, 5) also, gegen die Annahme, ein Durchmesser auf der Sphäre sein müßte.

12. Wenn in einem oder in gleichen Nichtnormalkreisen zwei Bogen dge, nfb gleiche Sehnen auf der Sphäre dke, nhb haben, und dabei zugleich beide entweder kleiner, oder beide größer als der halbe Nichtnormalkreis sind, so sind diese Bogen gleich.

Denn die Ebenen der zu den Nichtnormalkreisbogen gehörigen Sehnen auf der Sphäre mögen die Ebenen jener Bogen in den Geraden de, nb durchschneiden, daß also de eine gemeinschaftliche Sehne auf den Ebenen der Bogen dke, dge, und eben so nb die gemeinschaftliche Sehne auf den Ebenen der Bogen nhb, nfb ist. Da nun die Normalkreisbogen dke, nhb gleich sind, so sind auch ihre Sehnen de, nb gleich, und da zu zwei gleichen Sehnen in einem oder in gleichen Kreisen auch zwei paar gleiche Bogen, zwei kleinere und zwei größere gehören, so müssen auch dge, afb als zwei zu den gleichen Sehnen de, nb gehörige Bogen gleich

ſein, weil zugleich vorausgeſetzt iſt, daß beide gemeinſchaftlich entweder kleiner oder größer als die Hälfte des zugehörigen Kreiſes ſind.

§. 10.

Durch das bisherige beſtimmt ſich nun auch unter einem vergleichenden Rückblick auf die Ebenengeometrie, die Eigenthümlichkeit der Sphärengeometrie in ihrem Gegenſatz zu jener auf eine vollſtändige Weiſe.

1. In der Ebenengeometrie iſt nächſt ihrem Conſtructionsfelde, der Ebene, das erſte und allgemeinſte Conſtructionselement die Erzeugungslinie der Ebene, nehmlich die gerade Linie. Gleichmäßig wird in der Sphärengeometrie außer dem allgemeinen Conſtructionsfelde derſelben, der Sphäre, das weſentlichſte Conſtructionselement die Erzeugungslinie der Sphäre, nehmlich der Normalkreis ſeyn, oder dieſer wird in der Sphärengeometrie dieſelbe Bedeutung und daſſelbe Verhältniß zur Sphäre haben, in welchem in der Ebenengeometrie die gerade Linie zur Ebene ſteht.

Es ſind beſonders zwei Hauptpuncte, in welchen ſich dieſe Analogie verfolgen und nachweiſen läßt:

a. Das Maximum der Entfernung zweier Puncte auf der Ebene iſt vermöge der Natur der Ebene eine unendliche Größe, eine unbegränzte gerade Linie; es iſt aber mit zwei im Maximum der Entfernung auf der Ebene geſetzten Puncten nicht ſowohl nur eine gerade, als vielmehr eine unendliche Zahl von Parallellinien auf der Ebene geſetzt, weil die Individualität, welche ſonſt die endliche Begränzung erzeugt, alsdann aufhört und allein die Richtung übrig bleibt; oder durch dieſelben zwei Puncte auf der Ebene, deren Abſtand das Maximum der Entfernung in ihr ausdrückt, kann man ſich unendlich viel von einander verſchiedene gerade Linien gezogen vorſtellen.

Eine geometriſche Deduction dieſes Satzes iſt unter andern in Käſtners Anfangsgr. d. Geom. 12 Satz, 12 Zuſatz enthalten. Eine empiriſch bildliche Nachweiſung deſſelben geben alle, noch ſo weit von einander entfernte, durch die beiden Weltpole gehende Verlängerungen der Erdachſe.

Das Maximum der Entfernung zweier Puncte auf der Sphäre iſt, vermöge der Natur der letzteren, eine endliche Größe, ein Halbnormalkreis; es iſt aber mit zwei dergleichen im Maximum der Entfernung auf der Sphäre geſetzten Puncten ebenfalls nicht ein beſtimmtes Individuum der Erzeugungslinie der Sphäre geſetzt, ſondern weil dieſe Puncte immer die beiden Endpuncte eines und eben deſſelben Sphärendurchmeſſers ſind (§. 8, 4), ſo können durch ſie allemal unzählig viel verſchiedene Normalkreiſe gezogen werden (§. 6, 7).

b. Mit jeden nicht im Maximum der Entfernung auf der Ebene gesetzten zwei Puncten ist dagegen auch nur eine einzige endliche gerade Linie, als der schlechthin unmittelbare Ausdruck des Abstandes, (der kürzeste Weg) zwischen beiden Puncten gegeben. Eben daher ist die endliche gerade Linie, sofern sie durch ihre zuvor gesetzten Endpuncte als die absolut einfachste Raumerfüllung zwischen denselben in der reinsten Individualität bestimmt ist, auch der Anfang aller Construction der Ebenengeometrie und die Aufgabe: „Durch jede zwei, nur nicht im Maximum der Entfernung, auf der Ebene gegebenen Puncte die durch sie bestimmte endliche gerade Linie zu ziehen, und sodann, ist sie einmal realisirt, auch zu beiden Seiten, so weit man will, fortzusetzen" steht ohne weitere Ableitung und Nachweisung als absolutes Postulat an den Pforten der Ebenengeometrie geschrieben.

Völlig analogisch ist eben so durch zwei Sphärenpuncte, welche nicht im Maximum der Entfernung auf der Sphäre, d. h. nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, auch nur ein einziger Normalkreisbogen, der kleiner als ein Halbnormalkreis ist, gesetzt (§. 6, 8 und 9), und dieser ist der unmittelbare Ausdruck der Entfernung, der kürzeste Weg, zwischen denselben Puncten auf der Sphäre (§. 8, 3). Es ist daher auch ein aller Construction der Sphärengeometrie vorauf gehendes Postulat: Die absolute, schlechthin einfachste Raumerfüllung zwischen zwei Puncten der Sphäre, welche nicht das Maximum der Entfernung auf derselben bilden, zu realisiren, oder: durch jede zwei Puncte auf der Sphäre, welche nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, den durch sie bestimmten Normalkreisbogen, der kleiner als ein Halbnormalkreis ist, zu ziehen und über beide Endpuncte hinaus willkührlich zu verlängern.

Die Sphärengeometrie kann daher, behufs der Versinnlichung ihrer Constructionen auf einer empirischen Sphäre, den Gebrauch eines dem Erzeugungskreise dieser Sphäre congruent gekrümmten Lineals eben sowohl erlauben, wie die Ebenengeometrie zu gleichem Zweck die Hülfe des geraden Lineals auf der empirischen Ebene verstattet.

2. Nächst der geraden Linie ist der Kreis ein unumgängliches Bedürfniß der Ebenengeometrie und die Construction desselben ist, wenn gleich der der geraden Linie untergeordnet, so elementarisch, daß sie den Gegenstand des zweiten Postulats der Ebenengeometrie ausmacht.

Gleichmäßig ist auch für die Sphärengeometrie der Richtnormalkreis das zweite unerläßliche Element aller ihrer Constructionen, sie erzeugt ihn mit Hülfe des Normalkreises auf der Sphäre eben so, wie die Ebenengeometrie mittelst der geraden Linie den Kreis auf der Ebene beschreibt (§. 9, 3), und dem zweiten Postulat der

Ebenen-

Ebenengeometrie entsprechend heißt das in seiner Realisirung bereits anerkannte eben so elementarische zweite Postulat der Sphärengeometrie: mit jedem Normalkreisbogen, der kleiner als ein Halbnormalkreis ist, aus jedem Punct der Sphäre einen Kreis auf ihr zu beschreiben.

Wie die Ebenengeometrie auf der empirischen Ebene, so muß daher auch die Sphärengeometrie auf der empir. Sphäre den Gebrauch des Cirkelinstruments verstatten, das hier am zweckmäßigsten aus einem Metallbogen besteht, der an dem einen Endpunct mit einem Stifte versehen und von einer beweglichen, durch eine Schraube festzustellenden Hülse, welche den Schreibestift trägt, umfaßt wird. S. Fig. 3.

3. Gleich wie nun die Ebenengeometrie, von Axiomen, welche eben so elementarisch als ihre Postulate sind, ausgehend, das schlechthin Allgemeine und unabänderlich Bestehende einer jeden, durch die gerade Linie und den Kreis auf der Ebene zu Stande gebrachten Construction in Lehrsätzen erkennen läßt, dergestalt, daß sie jene Constructionen unter dem Vortheil und der Herrschaft der in ihnen erkannten Gesetze zugleich unter mannigfaltigen besonderen Bedingungen in der Form aufgelöster Aufgaben wiederum nach vielseitigen Richtungen hin zu modificiren vermag: so ist es die Idee der Sphärengeometrie, eben dasselbe unter der Potenz der durch ihren Gegensatz zur Ebenengeometrie bestimmten Elementarconstructionen zu leisten.

Die Sphärengeometrie muß also die allgemeingültigen Gesetze der durch den Normalkreis und jeden andern Kreis auf der Sphäre vermittelten Constructionen erkennen und dem gemäß die letzteren zugleich unter besonderen, mit der Natur derselben übereinstimmigen Bedingungen, der jedesmaligen Forderung gemäß, wiederum ausführen lehren.

Sphärische Winkel und sphärische Figuren im Allgemeinen.

§. 11.

Fig. 4. 1. Wenn zwei Normalkreisbogen rao, rls sich in einem Puncte r schneiden, so heißt der auf der Convergenzseite durch sie eingeschlossene, nach der Divergenzseite hin noch unbegränzte Raum der Sphäre ein sphärischer Winkel ors. Die Größe desselben ist also, eben weil von der räumlichen Begränzung auf der Divergenzseite abstrahirt wird, so wie die des ebenen Winkels, nicht von der Länge sondern allein von der Oeffnung seiner Schenkel abhängig. — Von dem rings um den Scheitel r liegenden Sphärenraum kann man übrigens nicht nur den diesseitigen, sondern auch denjenigen Theil desselben, in welchen die Verlängerungen rpm, rue der Schenkel rao, rls hinein fallen, als einen durch dieselben Schenkel gebildeten sphärischen Winkel betrachten; es wird indeß immer nur, wenn das Gegentheil nicht besonders bemerkt wird, der erstere, so wie in der Ebenengeometrie, allein berücksichtigt werden, da es eine in der Natur der Sache gegründete Ansicht ist, nur diesen als den eigentlich eingeschlossenen, jenen hingegen als einen durch diese Einschließung bloß ausgeschlossenen Raum zu betrachten.

Zwei Nichtnormalkreisbogen, desgleichen ein Normal- und Nichtnormalkreisbogen bilden, wenn sie sich durchschneiden, gleichfalls sphärische Winkel, wie z. B. gai, gad Fig. 2., die aber in der Sphärengeometrie eben so unberücksichtigt bleiben, wie in der Ebenengeometrie die durch Kreisbogen gebildeten Winkel. Unter sphärischen Winkeln schlechthin werden daher vorzugsweise nur solche verstanden, deren Schenkel durchweg Normalkreisbogen sind, gleich wie in der Ebenengeometrie ein ebener Winkel ohne weiteres auch als ein geradliniger angenommen zu werden pflegt.

Fig. 3. 2. Sphärische Winkel apb, dpf sind gleich, wenn, nachdem sie mit ihren Scheiteln p und zwei Schenkeln pa, pd über einander gelegt sind, auch die beiden andern Schenkel pf, pb auf einander fallen; geschieht das letztere nicht, so sind die Winkel ungleich und derjenige, dessen Schenkel außerhalb des andern Winkels fällt,

ist der größere von beiden. — Gleiche sphär. Winkel müssen also eben so wie gleiche ebene Winkel jedesmal congruent sein.

3. Wird der eine Schenkel pf eines sphär. Winkels dpf über seine Spitze p hinaus verlängert, so entstehen zwei sphärische Nebenwinkel dpf, apd, von denen, wenn sie, wie z. B. fpm, mph, Fig. 1. gleich sind, jeder ein rechter Winkel heißt und zwei Normalkreisbogen pfa, pmn sind senkrecht auf einander, wenn sie rechte Winkel bilden. Ein schiefer sphärischer Winkel ist entweder spitz, wenn er, wie dpf, kleiner, oder stumpf, wenn er, wie apd, größer als ein rechter ist.

4. Die Summe jeder zwei zusammen gehörigen sphärischen Nebenwinkel, dpf+apd, desgleichen die Summen aller an einem Punct p auf einer Seite, eines Normalkreisbogens apf liegenden sphär. Winkel, dpf+bpd+apb ist gleich zwei rechten sphär. Winkeln. Die Summe aller rings um einen Sphärenpunct herum liegender sphär. Winkel, wie z. B. dnh+hnp+anp+anq+dnq Fig. 1., ist gleich vier rechten sphär. Winkeln. Diese Sätze erhellen mit gleicher Leichtigkeit und aus denselben Gründen, wie in der Ebenengeometrie.

Der in S. 1. erwähnte mit dem Winkel ors zusammen gehörige sphärische Winkel ist die Ergänzung von jenem zu vier rechten, mithin immer größer als zwei rechte; er kann ein überstumpfer sphärischer Winkel heißen.

5. Wenn beide Schenkel eines sphär. Winkels arl über dessen Spitze hinaus verlängert werden, so entstehen sphärische Scheitelwinkel, arl, mre, desgleichen arm, lre die aus denselben Gründen, wie die ebenen, paarweise gleich sind. Fig. 4.

6. Wenn zwei sphär. Winkel kpv, tpo gleich sind, so müssen auch die aus ihrer Spitze mit gleichem Halbmesser auf der Sphäre zwischen ihre Schenkel beschriebene Sphärenkreisbogen ab, df gleich sein. Fig. 3.

Denn wenn die Winkel mit ihren Scheiteln p und p und zwei Schenkeln pk, po über einander gelegt werden, so müssen nicht nur die beiden andern Schenkel po, pt, sondern, weil die Halbmesser pa, pd, pb, pf gleich sind, auch die Puncte k und o, v und t auf einander fallen, folglich werden auch die zwischen den letzteren liegenden Bogen ab, df sich decken und einander gleich sein.

Sind hingegen zwei sphär. Winkel ungleich, so ist eben so klar, daß auch jene Bogen ungleich sein müssen, nehmlich zwischen den Schenkeln des größern

Winkels liegt der größere, zwischen den Schenkeln des kleinern Winkels der kleinere Bogen.

7. Daher sind umgekehrt, wenn die aus der Spitze sphärischer Winkel, zwischen deren Schenkel mit gleichem Halbmesser auf der Sphäre beschriebene Bogen gleich sind, auch die Winkel gleich; und wenn diese Bogen ungleich sind, so sind es auch die Winkel, mit dem größeren Bogen nehmlich gehört der größere, mit dem kleineren der kleinere Winkel zusammen.

8. Sphärische Winkel kpv, opv verhalten sich überhaupt eben so zu einander, wie sich die aus der Spitze dieser Winkel zwischen deren Schenkel mit gleichem Halbmesser auf der Sphäre beschriebene Sphärenkreisbogen ab, bd gegen einander verhalten.

Denn wenn das Verhältniß von ab zu bd in Zahlen durch das Verhältniß von m zu n ausgedrückt wird, daß also, wenn ab in m gleiche Theile zerlegt ist, bd aus n solchen, eben so großen Theilen, besteht, so wird auch durch die aus den Winkelspitzen nach den Theilungspuncten gezogenen Normalkreisbogen ebenfalls der eine Winkel kpv in m, der andere opv in n gleiche Theile (7) getheilt, d. h. es verhalten sich die Winkel, gleich den Bogen, wie m zu n. Da nun das Verhältniß der Bogen ab, bd allemal durch ein paar Rationalzahlen m und n vollkommen oder so genau, als man nur immer will, ausgedrückt werden kann, so werden sich auch überall jede zwei sphär. Winkel eben so, wie jene mit gleichem Halbmesser auf der Sphäre aus ihren Scheiteln zwischen ihre Schenkel beschriebene Sphärenkreisbogen zu einander verhalten.

9. Es müssen ferner alle aus dem Scheitel p eines sphärischen Winkels gph zwischen seine Schenkel mit verschiedenen Halbmessern auf der Sphäre beschriebene Sphärenkreisbogen, wie ab, kv, gh u. s. m. ein und eben dasselbe Verhältniß zur ganzen Peripherie der ihnen respective zugehörigen Sphärenkreise, oder mit andern Worten, gleich viel Grade, Minuten ꝛc. haben.

Denn es sei das Verhältniß des einen jener Bogen, z. B. des Bogens ab, zur Peripherie seines ganzen Kreises durch die Zahlen m und n ausgedrückt, so daß, wenn ab in m gleiche Theile zerfällt, n solcher Theile auf die ganze Peripherie gehen. Stellt man sich nun durch p und alle Theilungspuncte Normalkreisbogen gezogen vor, die zugleich die übrigen Bogen, kv, gh und deren Kreise durchschneiden, so wird zuvörderst der ganze um p herum befindliche Raum der Sphäre in n, und der Winkel gph in m gleiche Winkel getheilt (7). Eben

daher wird aber auch jeder der übrigen Bogen in m, und die Peripherie seines Kreises in n gleiche Bogen getheilt (6), und es verhält sich folglich ein jeder dieser Bogen zur Peripherie seines Kreises wie m zu n. Da sich nun das Verhältniß eines Bogens ab zur ganzen Peripherie allemal durch ein paar Rationalzahlen m und n vollständig, oder so vollkommen als man will, ausdrücken läßt, so haben alle jene Bogen ab, kv, gh u. s. w. ein und eben dasselbe Verhältniß zur Peripherie der zugehörigen Sphärenkreise, oder fassen dieselbe Zahl von Graden ꝛc.

Die umständlichere, erschöpfende, in solchen Fällen, wie beim gegenwärtigen und vorhergehenden Satze übliche Demonstration ist hier, der Kürze wegen, übergangen, da sie als eine, durch die Ebenengeometrie bereits bekannte Form hier angesehen werden darf.

10. Durch das vorhergehende ist es jetzt, ohne weitere Erläuterung, klar, daß jeder zwischen die Schenkel eines sphär. Winkels aus dessen Spitze beschriebene Sphärenkreisbogen, oder, welches dasselbe sagt, jeder zwischen den Schenkeln eines sphär. Winkels befindliche Bogen, dessen Pol der Scheitel des Winkels ist, als ein Maß dieses Winkels eben sowohl und in demselben Sinne zu betrachten ist, wie in der Ebenengeometrie die Kreisbogen als Maße der geradlinigen Winkel gebraucht werden. — Ein sphärischer Winkel heißt demnach ein Winkel von so viel Graden, Minuten ꝛc. wieviel Grade ꝛc. der Sphärenkreisbogen, welcher das Maaß dieses Winkels ist, in sich faßt, ohne alle Rücksicht auf die Größe des zu diesem Maaß gehörigen Halbmessers auf der Sphäre, weil dieselbe für einen und denselben Winkel die Zahl der Grade ꝛc. durchaus nicht ändert (9); und zwei sphär. Winkel sind gleich oder ungleich, wenn sie gleich, oder ungleich viel Grade ꝛc. haben, und zwar verhalten sie sich im letzteren Fall wie die zugehörige Zahl dieser Grade ꝛc.

11. Werden die Schenkel eines sphär. Winkels kpv über ihre Endpuncte k und v hinaus weit genug verlängert, so stoßen dieselben in dem Augenblicke, wo jeder von ihnen, vom Scheitel p an gerechnet, die Größe eines Halbnormalkreises erreicht hat, wieder in einem zweiten Punct q zusammen, so daß p und q Endpuncte eines Sphärendurchmessers pq und gemeinschaftliche Pole eines jeden auf letzterem senkrecht stehenden Sphärenkreises sind (§. 6, 5). Von den beiden sphär. Winkeln kpv, kqv kann daher jeder der Polarwinkel des andern heißen und jede zwei solcher zusammengehöriger Polarwinkel müssen gleich sein, weil jeder

aus der Spitze p des einen zwischen dessen Schenkel beschriebene Sphärenkreisbogen ab, kv u. s. m. ein gemeinschaftliches Maaß für beide ist.

12. Jeder sphärische Winkel bpd gehört mit einem Flächenwinkel zusammen, welcher durch die Ebenen der den Schenkeln desselben Winkels zugehörigen Halbnormalkreise pvq, poq gebildet wird und jeder aus der Spitze p zwischen die Schenkel des sphär. Winkels beschriebene Sphärenkreisbogen, wie bd, ist nicht nur ein Maaß des sphärischen, sondern auch jenes demselben zugehörigen Flächenwinkels oder der sphär. Winkel und der mit ihm zusammengehörige Flächenwinkel sind an Graden ꝛc. völlig gleich.

Denn da p der Pol des Bogens bd ist, so stehen die Ebenen der Normalkreisbogen pvq, poq und folglich auch ihre Durchschnittslinie pq auf der Ebene des Bogens bd senkrecht (§. 7, 3); demnach ist, wenn die letztere von den Ebenen der Bogen pvq, poq in den Graden be, de durchschnitten wird, bed der Neigungswinkel dieser Ebenen und e der zum Bogen bd gehörige Mittelpunct (§. 6, 2); mithin bd zugleich das Maaß des Neigungswinkels der zu den Bogen pvq, poq gehörigen Ebenen, d. h. bd ist ein Maaß des sphär. Winkels bpd und des durch die Ebenen seiner Schenkel gebildeten Flächenwinkels, oder beide Winkel fassen gleich viel Grade ꝛc.

Es darf daher hier nur ein für allemal bewirkt werden, daß so oft von einem durch Normalkreisebenen gebildeten Flächenwinkel die Rede gewesen seyn möge, das in Beziehung auf seine Größe von ihm erwiesene, eben sowohl auch vom zugehörigen sphär. Winkel gelten müsse, und umgekehrt. Zwei Normalkreisbogen bilden unter denselben Umständen einen rechten oder schiefen Winkel, unter welchen die Ebenen der zugehörigen Normalkreise senkrecht oder schief auf einander stehen u. s. w.

Fig. 1. 13. a. Der Normalkreisbogen op zwischen den zu den Schenkeln eines sphär. Winkels hnd gehörigen Polen o und p, ist zugleich ein Maß desselben Winkels, wenn der eine Pol, p mit dem Winkel auf einer und derselben Seite des zugehörigen Schenkels nd liegt, während der andere Pol o und der Winkel auf verschiedenen Seiten des zu o gehörigen Schenkels nh liegen.

Denn da der Bogen op verlängert durch die Pole der Winkelschenkel geht, so steht er auch auf den letzteren senkrecht (§. 7, 6), mithin ist auch der Winkelscheitel n wiederum der Pol des Bogens op (§. 7, 7) und folglich das zwischen den Winkelschenkeln befindliche Stück dh des verlängerten op das Maaß des Winkels hnd (10). Es ist aber bei der angegebenen Lage der Pole o und p nicht nur

oph = phd = 90° (§. 9, 4), sondern zugleich oph — ph = phd — ph d. h. op = dh oder op ist, gleich dem Bogen dh, das Maaß des Winkels hnd.

b. Liegt dagegen jeder Pol mit dem Winkel zugleich entweder auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten des respective zugehörigen Winkelschenkels, so ist der Normalkreisbogen zwischen diesen Polen nicht das Maaß des Winkels selber, sondern seines Neben- oder Supplementarwinkels.

Denn nimmt man z. B. von den beiden zum Schenkel nh gehörigen Polen, nicht wie vorhin, o, sondern r, der, eben so wie p, mit dem Winkel hnd auf einer und derselben Seite des zugehörigen Schenkels hn liegt, so hat man die Bogen rdhp + op = 180°, oder, wegen op = dh, auch rdhp + dh = 180°, d. h. der Bogen rdhp zwischen den Polen r und p ist das Maaß des Nebenwinkels vom Winkel hnd.

c. Wenn der sphär. Winkel ein rechter ist, so gilt der Satz in a ohne alle Einschränkung; denn die Pole eines jeden Kreises liegen im Umfange des andern (§. 7, 6) und der Bogen von jedem Pol des einen, zu jedem Pol des andern Schenkels ist stets ein Quadrant (§. 9, 4).

14. Der Normalkreisbogen zwischen zwei Polen ist unter den in §. 13, a angegebenen Umständen, vermöge des dortigen Beweises also auch das Maß des Neigungswinkels der den Polen zugehörigen Normalkreisebenen (12), eben daher aber ist er überhaupt auch das Maß des Neigungswinkels der Ebenen jeder zwei denselben Polen zugehörigen Sphärenkreise, da der Neigungswinkel der letzteren, weil sie mit den Normalkreisebenen parallel sind (§. 7, 2) dem Neigungswinkel von diesen gleich sein muß.

15. Wenn ein Pol o oder r um irgend einen Normalkreisbogen op oder pdr, der jedoch kleiner als 180° sein muß, vom Pol p eines Normalkreises ands entfernt ist, und es wird der zu jenem Pole o oder r gehörige Halbnormalkreis nhs auf der einen oder andern Seite jenes Normalkreises ands gezogen, so müssen von den vier sphär. Winkeln an beider Durchschnittspuncten n und s, in jedem Fall immer zwei zusammengehörige Polarwinkel mit dem Bogen op oder pdr gleich viel Grade haben, oder dieser muß das Maaß von jenen sein.

Denn wenn der Bogen pdr nicht etwa das Maaß des Winkels hnd ist, so ist er, verm. S. 13, das Maaß von seinem Supplementarwinkel hna und dem diesem gleichen Polarwinkel hsa. Eben so ist op, der nicht das Maaß von hna ist, wiederum das Maß von hnd und dem gleichen Polarwinkel hsd. —

Wenn der Sphärenpunct a vom Pol p des Normalkreises ands um 90° oder den Quadranten pfa entfernt ist, so liegt a im Umfange des Kreises ands (§. 9, 4) und der zu a gehörige Halbnormalkreis geht daher auch durch p oder q und steht senkrecht auf ands (§. 7, 6); folglich gilt in diesem Fall der Satz ohne Einschränkung, nehmlich pfa ist das Maaß für jeden der vier in n und s gebildeten Winkel, da sie sämmtlich rechte Winkel sind. — Daß übrigens o oder r um weniger als 180° von p entfernt seyn müsse, ist aus §. 9, 3) klar.

fig. 5. 16. Aufgabe. — Durch einen bestimmten Punct e eines Normalkreisbogens geh einen andern Normalkreisbogen epf so zu ziehen, daß derselbe mit jenem einen gegebenen sphärischen Winkel bad einschließe.

Auflösung und Beweis. Aus der Spitze a des gegebenen Winkels beschreibe man zwischen seine Schenkel mit einem willkührlichen Halbmesser auf der Sphäre, ak=al, einen Sphärenkreisbogen kml, der als das Maaß dieses Winkels, eben so wie er, kleiner als 180° sein wird. Man beschreibe ferner auf der einen Seite des Normalkreisbogens geh aus dem gegebenen Punct e mit dem vorigen Halbmesser ak=eg den Halbsphärenkreis grpv (§. 7, 3), schneide sodann von dem einen Durchschnittspunct g aus, mit einem Halbmesser auf der Sphäre, welcher dem Normalkreisbogen zwischen den Endpuncten des Bogens kml gleich ist, nehmlich mit gnp=ksl von dem Halbkreise grpv das Stück grp ab und ziehe aus e durch p den Normalkreisbogen epf, so bildet dieser mit geh in e den sphär. Winkel gef=bad. Denn da die Normalkreisbogen ksl, gnp gleich und die Sphärenkreisbogen kml, grp, deren Sehnen auf der Sphäre jene sind, vermöge der Construction beide zugleich kleiner als die Hälfte der ihnen zugehörigen mit gleichen Halbmessern beschriebenen Kreise sind, so sind auch diese Bogen kml, grp verm. §. 9, 12) und somit auch die von ihnen gemessenen Winkel gef, bad gleich (§. 7.).

§. 12.

1. Jeder auf der Sphäre von Linien völlig begränzte Raum heißt überhaupt eine sphärische Figur.

Dem Begriff der Sphärengeometrie gemäß können aber außer dem Sphärenkreise nur diejenigen sphärischen Figuren ein Object des elementarischen Theils derselben sein, welche von Normalkreisbogen, oder Nichtnormalkreisbogen, oder von beiden zugleich begränzt sind, gleich wie in den Elementen der Ebenengeometrie nächst

nächst dem Kreise nur diejenigen ebenen Figuren, welche von geraden Linien oder von Kreisbogen oder von beiden zugleich eingeschlossen sind, betrachtet werden.

2. Es werden übrigens vermöge der Natur der Sphäre von jeder Peripherie auf ihr eigentlich immer zwei zu verschiedenen Seiten der letzteren liegende Figuren begränzt, welche zusammen genommen die ganze Sphäre ausmachen; von diesen wird indeß immer nur die kleinere, die mithin zugleich kleiner als die halbe Sphäre ist und folglich ganz innerhalb des Umfanges eines Normalkreises liegt (§. 7, 9) allein berücksichtigt werden, wenn nicht etwa das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird oder beide Figuren gleich groß sind, indem sich die Ansicht von selbst giebt, die kleinere Fläche als die eigentlich nur eingeschlossene, die größere hingegen als eine durch diese Begränzung nur zufällig abgesonderte zu betrachten.

3) Es bedarf keiner umständlicheren Erwähnung, was unter Seiten und Winkeln einer sphärischen Figur zu verstehen sei; zugleich ist klar, daß die Zahl der ersteren der der letzteren in jeder sphär. Figur gleich sein müsse und die sphärischen Figuren erhalten nach dieser Zahl, so wie die ebenen, ihre Nahmen. Solche sphärische Figuren übrigens, die von Normal- und Nichtnormalkreisbogen zugleich oder von den letzteren allein begränzt sind, können sich nur in einem dem Sphärenkreise ausschließlich gewidmeten Abschnitt der Betrachtung darbieten und so oft daher von sphärischen eckigen Figuren ohne weiteres bloß die Rede ist, wer den darunter allein solche verstanden, die von lauter Normalkreisbogen begränzt sind, wie man auch in der Ebenengeometrie, wenn von einem Dreiecke, Vierecke u. s. w. schlechtweg gesprochen wird, immer nur ein von lauter geraden Linien eingeschlossenes vorauszusetzen gewohnt ist.

Das sphärische Dreieck.

§. 14.

Fig. 1. 1. Ein sphärisches Dreieck, abd, entsteht, wenn in einem sphärischen Winkel eaf ein Punct b des einen, mit einem zweiten Punct d des andern Schenkels durch einen Normalkreisbogen bd verbunden wird.

2. Sind alle drei Winkelpuncte, aus deren Verbindung durch Normalkreisbogen das sphär. Dreieck entstehen soll, besonders gegeben, so kann jenes nur dann wirklich zu Stande kommen, wenn die gegebenen Puncte nicht in der Peripherie eines einzigen Normalkreises liegen; wie an und für sich klar ist. — Ein besonderer hieher gehöriger Fall besteht darin, daß zwei der gegebenen Puncte, wie z. B. p und q, Fig. 1., Endpuncte eines Sphärendurchmessers sind, denn mit zwei solchen Puncten, weil zwischen ihnen unzählig viel Halbnormalkreise nach allen Richtungen möglich sind, liegt allemal auch der dritte Punct, b, welche Lage er sonst auch haben mag, in der Peripherie eines einzigen Halbnormalkreises pbq. Stellt man sich aber durch die beiden ersten Puncte p und q irgend einen Halbnormalkreis pnq vor, der nicht durch den dritten Punct b geht und zieht von b sodann nach p und q die Normalkreisbogen bp, bq, so wird jeder der letzteren die Verlängerung des andern und beide bilden gleichfalls einen Halbnormalkreis; denn wäre etwa bq nicht die Verlängerung von bp, so würde die wirkliche Verlängerung des Bogens bp den Bogen pnq in irgend einem andern, von q verschiedenem Puncte treffen, und es würden folglich gegen §. 6, 5) zwei Normalkreise sich scheiden, ohne sich in den Durchschnittspuncten zugleich zu halbiren. Es kann also unter den angegebenen Umständen höchstens nur ein sphärisches Zweieck, kein Dreieck, entstehen.

Fig. 2. 3. Sind dagegen die drei gegebenen Puncte a, b, d von der Beschaffenheit, daß sie nicht in der Peripherie eines und eben desselben Normalkreises liegen und daß insbesondere kein Paar derselben um einen Halbnormalkreis von einander entfernt ist, so muß die Verbindung derselben durch Normalkreisbogen jedesmal ein sphärisches Dreieck geben.

Denn die Bogen ab, bd, ad, welche die respectiven Entfernungen dieser Puncte auf der Sphäre ausdrücken (§. 8, 5), könnten nur dann kein sphärisches Dreieck geben, wenn entweder die nehmlichen Bogen einen einzigen Normalkreis bildeten, oder wenn wenigstens zwei derselben, wie etwa ab, bd, einer als des andern Verlängerung, einen einzigen Normalkreisbogen abd ausmachten. Das erstere aber findet unmittelbar durch die Voraussetzung selbst nicht statt; das zweite ist ebenfalls unmöglich, weil sodann der Bogen abd sowohl als ad jeder, verm. §. 6, 5, ein Halbnormalkreis sein müßten, gleichfalls der Voraussetzung entgegen. Aus der Verbindung der drei Puncte a, b, d durch die Normalkreisbogen, welche die respect. Entfernungen dieser Puncte auf der Sphäre darstellen, geht also jedesmal ganz unfehlbar ein Dreieck hervor, in welchem jede einzelne Seite kleiner als ein Halbnormalkreis ist.

4. In einem solchen sphärischen Dreiecke abd aber, worin jede Seite kleiner als 180° ist, muß auch jeder einzelne Winkel, wie z. B. bad, kleiner als 180° seyn.

Denn wenn man einen Schenkel des Winkels bad, etwa ab, über die Spitze a hinaus so weit verlängert, bis derselbe den zur gegenüber liegenden Seite bd gehörigen Normalkreis bdhβδi zum zweitenmal in β schneidet, so sind die Bogen bagβ, bdhβ jeder ein Halbnormalkreis (§. 6, 5), und der Punct β liegt, weil bd kleiner als 180°, außerhalb der Fläche des Dreiecks; die Schenkelverlängerung agβ fällt demnach auch außerhalb der Fläche des Winkels bad, da sie im Gegentheil innerhalb derselben fallen müßte, wenn der Winkel ein überstumpfer oder größer als 180° wäre (§. 11, 1); man hat nehmlich immer die Nebenwinkel bad + daβ = 180°, also bad < 180°.

5. Verbindet man aber die obigen drei Puncte a, b, d durch die gleichfalls zwischen ihnen befindlichen Normalkreisbogen, welche einzeln sämmtlich größer als ein Halbnormalkreis sind (§. 6, 9) so ist klar, daß dadurch kein sphär. Dreieck erzeugt werde, dessen Winkelpuncte die nehmlichen Puncte a, b, d wären, weil jede zwei dieser Bogen, indem sie wie dhβδib, dfαδka, von einem gemeinschaftlichen Winkelpuncte d auslaufen, sich, bevor sie zu den beiden andern Winkelpuncten b und a gelangen, noch in irgend einem von d um einen Halbnormalkreis entfernt liegendem Puncte δ durchschneiden müssen (§. 6, 5), wodurch die Begränzungsintegrität aufgehoben und ein sphär. Dreieck zwischen den Puncten a, b, d auf diesem Wege unmöglich gemacht wird. Aus gleichem Grunde kann begreiflich auch, wenn nur zwei Par Puncte durch die größeren, das dritte Par durch

Fig. 7. 3. Ist ursprünglich eine dreiseitige Ecke adcb gegeben, so entsteht das in Seiten und Winkeln mit ihr gleiche zusammengehörige sphär. Dreieck abd, wenn man den Scheitel c der Ecke als Sphärencentrum setzt und aus ihm mit dem Sphärenradius ca=cb=cd in den Ebenen der Seiten der Ecke die Bögen ab, bd, ad als Seiten des zugehör. sphär. Dreiecks beschreibt. Was also von der Größe der Seiten und Winkel einer dreiseitigen Ecke gilt, das wird allemal auch von der Größe der entsprechenden Seiten und Winkel des zur Ecke gehörigen sphär. Dreiecks gelten und so auch umgekehrt.

§. 16.

Fig. 6. 1. Verlängert man alle drei Seiten eines sphär. Dreiecks abd zu vollständigen Normalkreisen, so muß jedes Paar dieser Verlängerungen sich, wie bereits §. 14, 5. bemerkt worden, in einem, von dem Winkelpuncte des Dreiecks, welcher der gemeinschaftliche Anfangspunct eben dieser Verlängerungen ist, um einem Halbnormalkreis entfernt liegendem, zweiten Puncte durchschneiden, und zwischen den hiemit gebildeten drei neuen Durchschnittspuncten α, β, δ entsteht ein zweites sphärisches Dreieck αβδ, dessen Seiten und Winkel einzeln genommen denen des ursprünglichen Dreiecks abd gleich sind, nehmlich αβ=ab, αδ=ad, βδ=bd, desgl. die Winkel αβδ=abd, αδβ=adb, βαδ=bad.

Denn da der Bogen agβα=180° = agβ+αβ und eben so bagβ= 180°=agβ+ab (§. 6, 5), so ist agβ+αβ=agβ+ab, d. h. αβ=ab; und auf dieselbe Weise erhellt die Gleichheit der übrigen Seiten. Ferner ist der Winkel βαδ=βaδ (§. 11, 11)=bad (§. 11, 5), und eben so ergiebt sich auch die Gleichheit der übrigen Winkel. — Auch aus der Zuziehung der den Dreiecken angehörigen Ecken kann der Beweis geführt werden. — Von zwei solchen in Seiten und Winkeln einander gleichen, durch die Verlängerung der Seiten gegenseitig erzeugten sphärischen Dreiecke abd, αβδ, heißt ein jedes des andern Gegendreieck.

2. Vermöge der Construction liegen jede zwei zusammen gehörige Gegendreiecke, wie abd, αβδ mit jedem Paar gleicher Seiten, z. B. bd und βδ immer an einem und demselben Normalkreise bdhβδib, so daß das eine Dreieck ganz in der einen, das andere ganz in der andern der beiden durch eben den Normalkreis von einander geschiedenen Hemisphären sich befindet.

Man kann nun in Gedanken das eine Dreieck αβδ an jenem Normalkreise mit der anliegenden Seite βδ so weit fortrücken lassen, daß β in b, δ in d fällt,

also

also $\beta\delta = bd$ zu einer gemeinschaftlichen Seite werden, während die opponirten Winkelpuncte d und δ noch in verschiedenen Hemisphären liegen. Stellt man sich ferner zwischen den Winkelpuncten eines jeden Dreiecks gerade Linien vor, so müssen diese, als die gleichen Sehnen gleicher Normalkreisbogen, zwei congruente geradlinige Dreiecke bilden und wenn man das eine sphär. Dreieck $\alpha\beta\delta$ um die Gerade $\beta\delta$ nach dem andern abd hin sich herum drehen läßt, so muß bei der wirklich eintretenden Congruenz der eben gedachten geradlinigen Dreiecke auch α mit a zusammen fallen. In dieser Lage aber ist es augenscheinlich, daß, der völligen Gleichheit aller Elemente der beiden sphärischen Gegendreiecke ungeachtet, dennoch durchaus keine eigentliche Congruenz derselben statt finde, indem bei dem Zusammenfallen aller zu gleichen Winkeln gehöriger Scheitelpuncte die Convexität der Flächen beider Dreiecke sich als eine entgegengesetzte zeigt, so daß außer den drei Winkelspitzen alle übrige Puncte derselben gänzlich auseinander gehalten werden. Versetzt man dagegen beide Dreiecke in eine solche Lage, vermöge welcher, während zunächst wieder die gleichen Seiten $\beta\delta$ und bd sich decken, die Convexität gleichartig wird, indem man nun δ auf b, β auf d legt, so ist jetzt wieder an kein nothwendiges Aufeinanderfallen der Seiten $\delta\alpha$ und ba, $\beta\alpha$ und da zu denken, den besondern Fall einer zufälligen Gleichheit der Winkel β und δ, b und d unter sich und der daraus folgenden Gleichheit der Winkel δ und b, β und d ausgenommen.

Zwei zusammengehörige sphär. Gegendreiecke sind also, mit Ausnahme etwaniger Zufälligkeiten, keinesweges congruent, nichts desto weniger müssen sie, da beide bei der durchgehends anerkannten Identität ihrer Elemente schlechthin auf völlig gleiche Weise bestimmt sind, der Qualität und Quantität nach als völlig identische Dreiecke in demselben Sinne gelten, worin sonst in der Geometrie jede zwei congruente Figuren als identisch gesetzt werden.

3. Die Sphärik stimmt also allerdings mit der Ebenengeometrie darin überein, daß sie die Identität der Dreiecke und Figuren überhaupt in die Identität ihrer Elemente (der Seiten und Winkel) setzt; aber in der Ebenengeometrie ist bekanntlich mit der Identität der Elemente die Congruenz überall coincidirend und das Wort Congruenz ist daher dort nicht nur völlig zulänglich, die Identität überhaupt zu bezeichnen, sondern die Congruenz selbst ist da eben das allgemeine und unmittelbare Kriterium der Identität überhaupt. In der Sphärik ist dagegen die allgemeine Identität nicht so unmittelbar mehr an die bloße äußere Erscheinung der Congruenz gebunden und das Gebiet der Sphärik erscheint deshalb zugleich transcendenter, als das der Ebenengeometrie, weil man in jener unabhängig von der

unmittelbaren Congruenz und über dieselbe hinaus die Identität der Figuren zuzugestehen genöthiget ist. Wirklich giebt es einen nicht nur durch die ideale Ansicht im Allgemeinen, sondern auch durch besondere Thatsache der höheren besonders, wie auch der niedern Mathematik angewiesenen Standpunct, von welchem aus der Gegensatz zwischen der Ebenen- und Sphärengeometrie, so wie jeder Gegensatz auf einer höheren Stufe der Anschauung, wieder aufgehoben und die Ebenengeometrie als ein untergeordnetes Gebiet in das der Sphärik, nicht umgekehrt dieses in jenes, aufgenommen wird, wenn nehmlich die gerade Linie als ein unendlicher Kreis und die Ebene als eine unendlich große Sphäre gesetzt wird. — Aus den angegebenen Gründen ist also in der Sphärik das Wort: Congruenz, an sich nicht mehr hinlänglich, die Identität zu bezeichnen, sondern diese muß vielmehr hier durch ihren eigenen Nahmen selbst ausgesprochen werden und zwei sphärische Dreiecke insbesondere heißen identisch, nicht nur wenn unmittelbar zwischen ihnen selbst Congruenz statt findet, sondern auch dann, wenn das eine nur das Gegendreieck des andern oder nur mit diesem Gegendreiecke congruent ist.

4. Es ist leicht zu übersehen, daß, wenn zu einem sphär. Dreiecke abd sein Gegendreieck $\alpha\beta\delta$ construirt wird, außer dem letzten noch sechs andere sphär. Dreiecke entstehen, welche die Nebendreiecke des ursprünglichen oder Hauptdreiecks genannt werden können. Sie liegen einzeln nicht, wie das Gegendreieck, zwischen drei neuen Durchschnittspuncten, sondern entweder zwischen zwei Winkelpuncten des Haupt- und einem Winkelpunct seines Gegendreiecks, oder umgekehrt zwischen zwei Winkelpuncten des letzteren und einem Winkelpuncte des ersteren. Mit andern Worten heißt dies: während das Haupt- und sein Gegendreieck keine Seite und keinen Winkelpunct mit einander gemein haben, hat jedes Nebendreieck entweder eine Seite mit dem Haupt- und einen Winkelpunct mit dem Gegendreieck oder umgekehrt eine Seite mit dem Gegen- und einen Winkelpunct mit dem Hauptdreiecke gemein, womit zugleich evident wird, daß die Zahl dieser Nebendreiecks auf nicht mehr und minder als sechs sich belaufen kann. So liegt zwischen der Seite ad des Haupt- und dem Winkelpunct β des Gegendreiecks das Nebendreieck $a\beta d$ (zu einer Ecke gehörig, deren Seiten acd, $ac\beta$, $dc\beta$ sind); desgl. liegt zwischen der Seite $a\delta$ des Gegen- und den Winkelpunct b des Hauptdreiecks das Nebendreieck $ab\delta$ (dessen Ecke aus den Seiten $ac\delta$, acb, δcb besteht). Eben so liegen zwischen bd und α-und zwischen $\beta\delta$ und a die Nebendreiecke $b\alpha d$ und $\beta a\delta$ (die Seiten der zugehör. Ecken sind bei jenem: bcd, bcα, dcα, bei diesem: $\beta c\delta$, βca, δca) und zwischen ab und δ, $\alpha\beta$ und d liegt das dritte Paar Nebendreiecke $a\delta b$,

αdβ (zu Ecken gehörig, deren Seiten bei jenem: acb, acδ, bcδ, bei diesem: acβ, acd, βcd sind). — Es ist nach dieser Uebersicht zugleich klar, daß die sämmtlichen sechs Nebendreiecke sich in drei Seitendreiecke des Haupt- und eben so viel des Gegendreiecks unterscheiden lassen, so daß jedes der ersteren, wie aβd, eine Seite ad mit dem Haupt-, jedes der letzteren, wie αbδ, eine Seite αδ mit dem Gegendreieck des Hauptdreiecks gemein hat. Auch sieht man, daß je zwei dergleichen Seitendreiecke, das eine vom Haupt-, das andere vom Gegendreiecke, wenn sie, wie die eben genannten, gleiche Seiten ad und αδ und homologe Winkelpuncte β und b mit dem Haupt- und Gegendreiecke gemein haben, wiederum unter sich identisch sind und ein Paar zusammengehörige Gegendreiecke aβd, αbδ bilden, von denen jedes als ursprüngliches oder Hauptdreieck gesetzt werden kann, so daß in dieser Beziehung die so lange als Haupt- und Gegendreieck betrachteten abd, αβδ wiederum in die Reihe der Nebendreiecke, als identische Seitendreiecke von aβd und αbδ zurücktreten, und so fort mit jedem identischen Paare der acht Dreiecke, in welche sonach überhaupt mit jedem einzelnen sphär. Dreiecke durch die vollständige Verlängerung seiner Seiten die ganze Sphäre zerfällt.

§. 17.

1. Es sei abd ein sphär. Dreieck, aus dessen zwei Winkelscheiteln a und b zuvörderst mit einem Normalkreisquadranten ade=abf=bag=bdh zwei Normalkreisbogen ikfelm, inghlo beschrieben werden (§. 9, 5), welche, weil ab kleiner als ein Halbnormalkreis, a und b also die Pole verschiedener Normalkreise sind, sich nothwendig, gehörig verlängert, in zwei Puncten i und l durchschneiden (§. 6, 5). Es ist also a der Pol des Bogens ikfelm und b der Pol des Bogens inghlo, und weil mithin der Bogen ab durch den Pol eines jeden dieser beiden Bogen hindurchgeht, so müssen wiederum eben diese Bogen auch durch des Bogens ab Pole gemeinschaftlich hindurch gehen und senkrecht auf ihm oder seiner Verlängerung stehen (§. 7, 6), und ihre beiden Durchschnittspuncte i und l müssen mithin diese Pole des Bogens ab sein (§. 7, 7). Der eine Pol l liegt demnach mit dem Dreiecke abd auf einer und derselben Seite des Bogens ab, nehmlich in einer und derselben durch die vollständige Verlängerung des Bogens ab begränzten Hemisphäre; der andere Pol i liegt in der entgegengesetzten Hemisphäre auf derjenigen Seite des Bogens ab, an welcher das Dreieck abd sich nicht befindet. — Es werde nun auch aus dem dritten Winkelpuncte d des Dreiecks abd mit dem Viertelnormalkreis dap=dbq ein dritter Normalkreisbogen pnkqom Fig. 3

beſchrieben, der, gehörig verlängert, aus gleichen Gründen wie vorhin, mit dem aus a bereits beſchriebenen Bogen in zwei Puncten, k und m und mit dem aus b beſchriebenen in zwei Puncten, n und o ſich durchſchneiden wird. — Daß derſelbe etwa durch die beiden erſten Durchſchnittspuncte l und i hindurchgehen könne, in welchem Fall ſtatt der genannten drei Paar Durchſchnittspuncte l und i, k und m, n und o, nur das erſte zugleich als Repräſentant der beiden andern übrigen entſtehen würde, davon erhellt die Unmöglichkeit aus §. 7, 8., weil vermöge deſſelben die Puncte a, b, d der Vorausſetzung, daß abd ein ſphär. Dreieck ſei, ſchlechthin entgegen (§. 14, 2) im Umfange eines einzigen Normalkreiſes liegen müßten, wenn die Normalkreiſe, welche aus dieſen Puncten beſchrieben ſind, oder denen die letzteren als Pole zugehören, nur ein einziges Paar Durchſchnittspuncte gemein hätten. — Es iſt nun ferner aus gleichen Gründen wie vorhin nicht nur d der Pol des Bogens pnkqom, ſondern von den Puncten, in welchen letzterer jeden der aus a und b beſchriebenen Bogen ſchneidet, iſt wiederum n der Pol des Bogens bd auf der nehmlichen Seite deſſelben, auf welcher das Dreieck abd liegt und k iſt der Pol des Bogens ad, gleichfalls mit dem Dreiecke abd auf einer und derſelben Seite dieſes Bogens; die beiden andern Durchſchnittspuncte, nehmlich o als der Pol von bd und m als der Pol von ad liegen auf den entgegengeſetzten Seiten der zugehörigen Bogen, nehmlich auf denjenigen, an welchen das Dreieck abd ſich nicht befindet.

Es iſt demnach klar, daß wenn aus den drei Winkelpuncten eines ſphäriſchen Dreiecks abd mit einem Viertelnormalkreis drei andere Normalkreisbogen beſchrieben werden, dieſelben gehörig verlängert allemal ein zweites ſphäriſches Dreieck nkl (zu einer Ecke gehörig, deren Seiten nck, ncl, kcl ſind) geben müſſen, deſſen Winkelſpitzen l, n, k nach der Reihe die Pole der Seiten ab, bd, ad des erſteren Dreiecks abd ſind und dabei einzeln auf derſelben Seiten dieſer Bogen liegen, auf welcher an jedem von ihnen das Dreieck abd liegt, und daß ferner auch umgekehrt die Winkelſpitzen a, b, d des urſprünglichen Dreiecks nach der Reihe die Pole der Seiten kl, ln, nk des durch jene Conſtruction entſtandenen Dreiecks nkl ſind, ſo daß wieder dieſe Pole nach der Reihe einzeln mit dem Dreiecke nkl auf einer und der nehmlichen Seite der zu ihnen gehörigen Bogen oder Seiten deſſelben Dreiecks liegen. Es heißt daher von zwei auf dieſe Weiſe zuſammen gehörigen ſphär. Dreiecken abd, nkl ein jedes des andern Polardreieck.

2. Die Peripherien zweier zuſammen gehöriger Polardreiecke abd, nkl können entweder gar keinen Punct mit einander gemein haben, ſo daß entweder das

ursprüngliche abd ganz innerhalb der Fläche des zu ihm verzeichneten Polardreiecks nkl liegt, oder daß auch umgekehrt das letztere ganz innerhalb der Fläche des ursprünglichen fällt, wie man sogleich sieht, wenn man nur nkl als das ursprüngliche Dreieck setzt, wo sodann abd wiederum das zugehörige Polardreieck wird. Es bedarf nach dem, was zuvor über das Wesen der Construction der Polardreiecke beigebracht ist, keiner weiteren Auseinandersetzung, daß der erstere der beiden erwähnten Fälle jedesmal, wenn alle Seiten des ursprünglichen Dreiecks einzeln kleiner, der zweite dagegen immer dann, wenn alle Seiten des ursprünglichen Dreiecks einzeln größer als ein Quadrant sind, eintreten werde. — Es können sich aber auch die Peripherien zweier zusammen gehörigen Polardreiecke auf mannigfaltige Weise durchschneiden, so daß die Fläche des einen theils innerhalb, theils außerhalb der Fläche des andern fällt, und es ist eben so leicht einzusehen, daß dieses statt finden werde, wenn eine oder zwei Seiten des ursprünglichen Dreiecks einzeln größer oder auch eben so groß als ein Quadrant sind. So ist in Fig. 9. in dem ursprünglichen Dreiecke abd die Seite bd größer als ein Quadrant, weshalb der aus d mit dem Quadranten dq beschriebene Bogen mnfqko und die zu ihm gehörige Seite nk des Polardreiecks nkl die Seiten bd, ab des ursprünglichen in den Puncten q und f durchschneidet. Ferner ist die Seite ab gerade so groß als ein Quadrant, weshalb der aus b mit dem Quadranten ab=ah beschriebene Bogen inahlo und die durch ihn gebildete Seite ln des Polardreiecks nkl gerade durch den Winkelpunct a des ursprünglichen Dreiecks hindurch geht und die Seite bd desselben, da diese, wie schon erwähnt, größer als ein Quadrant ist, in h schneidet. Endlich ist die Seite ah kleiner als ein Quadrant und der aus a mit dem Quadranten ahl=ab beschriebene Bogen ibklrm geht gerade durch den Winkelpunct b des ursprünglichen Dreiecks, aber die durch eben den Bogen gebildete Seite kl des Polardreiecks hat keinen Punct mit der Peripherie des ursprünglichen gemein; daß demnach die Flächen beider Polardreiecke abd, nkl das Viereck afqh gemeinschaftlich haben, im übrigen aber ganz auseinander fallen. — Ein besonderer Fall ist der, wenn jede Seite des ursprünglichen Dreiecks ein Quadrant ist; denn alsdann fällt begreiflich das Polardreieck gänzlich in das ursprüngliche zurück und beide sind schlechthin eins.

5. Uebrigens geben die vollständigen Verlängerungen der Seiten des zum ursprünglichen Dreieck abd verzeichneten Polardreiecks, nach §. 16, das Gegendreieck, und die sechs Nebendreiecke desselben, nehmlich die drei Seitendreiecke jenes mit dem Polardreiecke identischen Gegendreieckes zwischen den Puncten o, i, m und Fig. 8. und 9.

die in den Figuren ausgezeichneten drei Seitendreiecke nml, lok, kin (zu Ecken gehörig, deren Seiten nach der Reihe folgende sind: ncl, ncm, mcl; ocl, ock, kcl; nck, nci, ick) des Polardreiecks nkl selber. Das eigentliche Polardreieck ist indeß in der obigen Darstellung durch die Hervorhebung des Merkmals, daß seine Winkelpunkte mit dem ursprünglichen Dreiecke immer auf einer und derselben Seite der zu ihnen als deren Polen gehörigen Seiten des letzteren liegen, dergestalt charakterisirt worden, daß es vollkommen von seinen Seitendreiecken unterschieden und jede Verwechselung zwischen ihm und diesen schlechthin beseitigt ist. Sonst ist klar, daß auch jedes Seitendreieck des Polardreiecks, wie z. B. nml, die Eigenthümlichkeit habe, daß seine Winkelpuncte, eben so wie die des Polardreiecks selber, nach der Reihe die Pole der Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind; es ist nehmlich, wie schon bekannt, n von bd, l von ab und m, gleich k, der Pol von ad; aber eben dieser Pol m und das Dreieck abd liegen auf entgegengesetzten Seiten des Bogens ad, wodurch der Unterschied hier, so wie bei allen übrigen Nebendreiecken des eigentlichen Polardreiecks zwischen diesem und jenen entschieden bestimmt ist.

4. Die Seiten und Winkel zweier zusammengehöriger Polardreiecke abd, nkl ergänzen sich in Graden ꝛc. paarweise zu 180°, dergestalt, daß in jedem der beiden Dreiecke jede Seite das Supplement desjenigen dem andern Dreiecke zugehörigen Winkels ausmacht, dessen Scheitel der Pol jener Seite ist, daß mithin ab + Winkel nlk = ad + nkl = bd + lnk = nk + adb = nl + abd = kl + bad = 180° ist.

Denn es ist verm. der Construct. Fig. 8. bag = ab + ag = 90°, desgleichen abf = ab + bf = 90°, also ab + ag + ab + bf = 180°, d. h. ab + gabf = 180°. Da nun zugleich l der Pol des Bogens gabf und dieser letztere folglich das Maaß des Winkels nlk oder demselben an Graden gleich ist (§. 11, 10), so hat man auch ab + nlk = 180°. Eben so erhellt das supplementarische Verhalten der übrigen Seiten ad, bd des Dreiecks abd mit den Winkeln nkl, lnk des zugehörigen Polardreiecks nkl. (In Fig. 9. ist ab ein Quadrant, also ab + ab = 180° = ab + nlk (§. 11, 10), nehmlich Winkel nlk = ab = 90°). Gleichfalls ist auch, weil n der Pol der Seite bd und deren Verlängerung qbdh ist, (Fig. 8.) ngh = ng + gh = 90°, und weil eben so l der Pol des Bogens gabf ist, so ist lhg = lh + gh = 90° (§. 9, 4), also ng + gh + lh + gh = 180° d. h. nl + gh = 180°. Da nun gh das Maaß des Winkels abd oder ihm an

Graden gleich ist (§. 11, 10), so muß wiederum auch nl+abd=180° sein; (für Fig. 9. gilt diese Demonstration, wenn in ihr überall a statt g gesetzt wird, weil hier der Punct a mit g identisch ist) und auf gleiche Weise erhellt das supplementarische Verhalten der übrigen Seiten nk, kl im Dreiecke nkl mit den Winkeln adb, bad des ursprünglichen Dreiecks abd.

5. Es ist noch zu bemerken, daß zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecks abd und irgend eines zu dessen Polardreieck nkl gehörigen Nebendreiecks, wie z. B. nml, keinesweges ein solches supplementarisches Verhalten, wie an den Polardreiecken selber durchgehends statt finde. Nur eine Seite im ursprünglichen und eben so eine Seite im Nebendreiecke des Polardreiecks ist von einem Winkel des andern Dreiecks, nehmlich demjenigen, dessen Scheitel der Pol eben der Seite ist, das Supplement, die übrigen beiden Seiten in beiden Dreiecken sind dagegen mit denjenigen Winkeln, deren Scheitel die Pole jener Seiten sind, an Graden gleich. Es ist nehmlich, der obigen Demonstration (4) zufolge, in dem Nebendreiecke nml die mit dem Polardreiecke ihm gemeinschaftliche Seite nl das Supplement des Winkels abd und gegenseitig ist ad im ursprünglichen Dreiecke das Supplement des jener gemeinschaftlichen Seite gegenüber liegenden Winkels lmn, weil ad das Supplement des Winkels nkl ist, mit dem lmn als Polarwinkel (§. 11, 11) gleich ist. — Ferner ist nun aber nm=Winkel adb, weil nk+adb =180° und auch nk+nm=180° ist (§. 6, 5), daß also zwischen nm und dem Winkel adb kein supplementarisches Verhalten statt finden kann, wenn nicht etwa zufällig adb=nk=nm=90° ist. Eben so ist aus gleichen Gründen lm=Winkel bad. — So ist nun auch ab=Winkel nlm, weil ab+nlk=180° und auch nlk+nlm=180°, als Nebenwinkel. Aus gleichen Gründen ist bd=Winkel lnm. — Und eben so verhält es sich mit allen übrigen Nebendreiecken.

§. 18.

Die obigen Entwickelungen führen jetzt auf die zur Natur des sphärischen Dreiecks in Hinsicht des gegenseitigen Verhaltens seiner Elemente gehörigen allgemeinen Grundbestimmungen.

1. In jedem sphär. Dreiecke abd, worin nach der ein für allemal geltenden Voraussetzung jede Seite und jeder Winkel kleiner als 180° ist, sind allemal zwei Seiten ab und bd zusammen genommen größer als die dritte ad. Fig. 7.

Der Satz darf natürlich nur für den Fall bewiesen werden, wenn die verglichene Seite ad größer ist, als jede der beiden andern, daß mithin auch von den

Seitenwinkeln der zum Dreieck gehörigen Ecke der Winkel acd größer ist, als jeder der beiden andern acb, bcd. — Es werde demnach in der Ebene des Winkels acd eine Gerade ce von willkührlicher Länge so gezogen, daß der Winkel ace = acb sei, sodann nehme man auf der Seitenlinie bc das Stück ck = ce, ziehe durch e in der Ebene acd unter beliebiger Richtung eine Gerade, welche die beiden andern Seitenlinien in f und g schneide und verbinde diese Puncte mit k durch die Geraden kf, kg: so hat man in den congruenten Dreiecken fck, fce die Seiten fk = fe, also, da fk + gk > fg, auch fe + gk > fg, mithin gk > ge und darum ferner, weil ck = ce und der Schenkel cg gemeinschaftlich ist, den Winkel gck > gce, folglich auch gck + ecf > gce + ecf, oder, da vermöge der Construction ecf = fck, zugleich gck + fck > gce + ecf d. h. bcd + acb > acd und somit auch bd + ab > ad (§. 15, 3).

2. Die Summe der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks abd muß jedesmal kleiner als ein ganzer Normalkreis oder in Graden kleiner als 4. 90° sein.

Denn wenn eine der Seitenlinien, cd der zum Dreieck gehörigen Ecke über die Spitze hinaus bis zu einem beliebigen Punct m verlängert wird, so entsteht eine neue Ecke, die mit jener die Seite acb gemeinschaftlich hat, ihre beiden andern Seiten aber, bcm, acm sind als Nebenwinkel nach der Reihe die Supplemente von den Seiten bcd, acd der ersteren Ecke. Es ist also bcm + acm + bcd + acd = 2. 180° = 4. 90° und da bcm + acm > acb (1), so ist acb + bcd + acd < 4. 90°, folglich (§. 15, 3) auch ab + bd + ad < 4. 90°.

3. In jedem sphärischen Dreiecke müssen von den einzelnen Supplementen seiner drei Winkel jede zwei zusammen genommen größer sein als das dritte Supplement.

Denn die Winkelsupplemente eines sphär. Dreiecks sind an Graden den Seiten des zu ihm gehörigen Polardreiecks der Reihe nach gleich (§. 17, 4), womit die Behauptung unmittelbar auf den Satz in 1 zurückgeführt ist.

4. Die Summe der Winkelsupplemente eines sphärischen Dreiecks muß jedesmal kleiner als vier rechte Winkel oder kleiner als 4. 90° sein.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich durch eben das Argument wie die vorhergehende unmittelbar aus S. 2.

5. Die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks muß stets kleiner als sechs rechte Winkel, kleiner als 6. 90°, aber auch jedesmal größer als zwei rechte Winkel oder größer als 2. 90° sein.

Denn

Denn da jeder Winkel des Dreiecks kleiner als 2. 90° ist (§. 14, 8. so ist die Summe aller drei Winkel offenbar kleiner als 3.2.90°, oder kleiner als 6. 90°.

Da ferner aber auch die drei Winkel mit ihren Supplementen zusammen genommen offenbar 3 . 180° = 6 . 90° betragen und die Summe der drei Supplemente für sich jedesmal, vermöge des 4ten Satzes, kleiner als 4 . 90° ist, so ist nothwendig auch die Winkelsumme des Dreiecks größer als 6 . 90° — 4 . 90°, d. h. sie ist größer als 2 . 90°.

6. Beim sphärischen Dreiecke ist also nicht nur die Seitensumme eine unbeständige Größe zwischen 0° und 360°, sondern auch die Winkelsumme ist eine Inconstante zwischen 180° und 540°.

Die vier erſten Kennzeichen der Identität ſphäriſcher Dreiecke und damit in Verbindung ſtehende Lehren.

§. 19.

Fig. 10. 1. Wenn in zwei ſphär. Dreiecken, abd und efg oder abd und hik, zwei Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel gleich ſind, nehmlich ab = ef = hi, bd = fg = ik und die Winkel b = f = i, ſo ſind die Dreiecke identiſch.

Denn wenn die Dreiecke, wie abd und efg gleiche Convexität haben, ſo ſind ſie aus eben den Gründen, wie ein paar geradlinige, identiſch; iſt aber, wenn die homologen Winkelpuncte i und b, k und d auf einander liegen, die Convexität entgegengeſetzt, ſo conſtruire man des einen Dreiecks abd Gegendreieck, durch deſſen eben ſo wie vorher dargelegte Congruenz mit hik nun auch die Identität zwiſchen hik und abd ſelber erwieſen iſt (§. 16, 3).

2. Durch zwei Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel, wenn anders dieſe Elemente nur den zur Natur des ſphär. Dreiecks gehörigen Grundbedingungen entſprechen (§. 18.), nehmlich wenn jedes derſelben kleiner als 180° iſt, wird alſo immer ein ſphäriſches Dreieck beſtimmt, worin auch jedes der übrigen Elemente kleiner als 180° iſt und das Dreieck muß ſich aus jenen Elementen, wenn ſie einzeln gegeben ſind, allemal conſtruiren laſſen.

Aufg. Es ſeien alſo gegeben zwei Normalkreisbogen m und n und ein ſphär. Winkel p, die ſämmtlich einzeln kleiner als 180° ſind; es ſoll das dadurch beſtimmte Dreieck, in welchem der gegebene Winkel zwiſchen den gegebenen Bogen liegt, verzeichnet werden.

Auflöſung u. Beweis. Man lege nach §. 11, 16 an einen Punct b eines Normalkreisbogens bds einen Winkel tbs, der dem gegebenen p gleich iſt, und nehme auf den Schenkeln deſſelben mit den Halbmeſſern auf der Sphäre m und n die Bogen ba = m, bd = n: ſo iſt für ſich klar, daß die Endpuncte a und d mit dem Winkelpuncte b nicht im Umfange eines und deſſelben Normalkreiſes liegen, desgleichen, daß auch a und d nicht Endpuncte eines und deſſelben Sphärendurch-

messers sein können, weil in beiden Fällen die Schenkel ba, bd sich nicht schneiden, sondern einer des andern Verlängerung sein würden (§. 14, 2). Man ziehe also den der Lage (§. 6, 9) und Größe nach durch a und d bestimmten Normalkreisbogen ad<180°, so bildet derselbe mit ab und bd ein sphär. Dreieck abd (§. 14, 3) das verm. der Construct. die gegebenen Elemente enthält und in welchem zugleich alle übrigen Elemente, gleich den ihnen gegenüberliegenden gegebenen, einzeln kleiner als 180° sein müssen (§. 14, 8).

3. Wenn in obiger Construction die gegebenen Bogen gleich sind, so entsteht ein gleichschenkliges sphär. Dreieck abd mit den gleichen Seiten oder Schenkeln ab, bd, bei welchen, wie beim geradlinigen, die dritte Seite ad die Grundlinie und der gegenüberliegende Winkelscheitel b die Spitze heißt, und wenn die gegebenen Bogen zusammen einem Halbnormalkreise gleich, also einer des andern Supplement sind, so entsteht folglich ein sphär. Dreieck, abd, mit zwei Supplementarseiten ab, bd, bei welchem gleichfalls die dritte Seite ad die Grundlinie und der gegenüberliegende Winkelpunct b die Spitze des Dreiecks genannt werden wird. Fig. 11. Fig. 12

§. 20.

1. Wenn in zwei sphär. Dreiecken abd und efg oder abd und hik zwei Winkel nebst der zwischenliegenden Seite einander gleich sind, nehmlich Winkel b=f=i, d=g=k und die Seiten bd=fg=ik, so sind die Dreiecke identisch. Fig. 10.

Denn wenn die Dreiecke efg, abd, so daß die gleichen Seiten in f und b, g und d sich decken, übereinander gelegt werden, so müssen, wegen der gleichen Winkel, auch fe und ba, desgleichen ge und da der Lage nach identisch werden, mithin müssen auch die Durchschnittspuncte e und a und folglich die ganzen Dreiecke sich decken. Ist bei entgegengesetzter Converität keine unmittelbare Congruenz der Dreiecke möglich, so wird ihre Identität wieder aus der gleichmäßig erwiesenen Congruenz zwischen dem einen, hik und dem Gegendreieck des andern, abd evident (§. 16, 3).

2. Mit zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite, so oft diese Elemente nur den wesentlichen Bestimmungen eines sphärischen Dreiecks überhaupt entsprechen, nehmlich einzeln genommen sämmtlich kleiner als 180° sind (§. 18), gehört daher immer ein und eben dasselbe sphär. Dreieck zusammen, worin auch jedes der

übrigen Elemente kleiner als 180°, und dieses Dreieck muß sich aus jenen einzeln gegebenen Elementen allemal construiren lassen.

Aufgabe. Es seien gegeben die beiden Winkel p und r und der Normalkreisbogen n, die sämmtlich einzeln kleiner als 180° sind: es soll das zugehörige sphär. Dreieck, worin n zwischen p und r liegt, verzeichnet werden.

Aufl. u. Beweis. Man nehme von einem Normalkreisbogen ein Stück bd=n und lege an dessen Endpuncte auf einer und derselben Seite nach §. 11, 16 die gegebenen Winkel, so ist die Realisirung des beabsichtigten Dreiecks außer Zweifel, sobald es gewiß ist, daß der Bogen bd von den Schenkeln der verzeichneten Winkel in b und d wirklich geschnitten und daß diese Schenkel selbst auch auf derselben Seite des Bogens sich in einem Puncte a durchschneiden. Das erste ist an sich klar; das zweite ist eben so nothwendig, weil wenn die Schenkel sich nicht schnitten, sondern einen einzigen Normalkreisbogen bad bildeten, dieser sowohl als der Bogen bd gegen die Voraussetzung ein Halbkreis sein müßte (§. 6, 5). Es entsteht also zwischen den Durchschnittspuncten b, d, a allemal ein sphär. Dreieck abd, das verm. der Construction die gegebenen Elemente in sich trägt und in welchen zugleich verm. §. 14, 8 jedes der übrigen Elemente, gleich dem ihm gegenüberliegenden gegebenen, kleiner als 180° sein muß.

3. Sind in obiger Construction die gegebenen Winkel gleich, so erhält man ein sphär. Dreieck mit zwei gleichen Winkeln, und wenn ein Winkel der Nebenwinkel des andern ist, oder beide zusammen 180° betragen, so entsteht ein sphär. Dreieck mit zwei Supplementarwinkeln.

§. 21.

Fig. 11. 1. In jedem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke abd, sind auch die Winkel, a und d, an der Grundlinie ad, gleich.

Denn wenn das Gegendreieck $\alpha\beta\delta$ construirt wird, so sind die Winkel $\alpha=a$, $\delta=d$, $\beta=b$ und die Seiten $\alpha\beta=ab$, $\beta\delta=bd$ (§. 16, 1); also auch $\beta\delta=ab$ und $\alpha\beta=bd$, womit folglich, wegen $\beta=b$, nach §. 19, 1, zugleich eine solche Identität beider Dreiecke statt findet, vermöge deren auch die Winkel $\delta=a$, $\alpha=d$ sind, weshalb also auch a und d unter einander selbst gleich sein müssen.

2. Umgekehrt muß jedes sphär. Dreieck mit zwei gleichen Winkeln auch zwei gleiche denselben gegenüberliegende Seiten haben, oder gleichschenklig sein.

Denn man setze im Dreiecke bad die Winkel a=d, so hat man, nach der Construction des Gegendreiecks $\beta\alpha\delta$, $a=\alpha=\delta$, desgleichen $d=\delta=\alpha$, woraus,

wegen der Gleichheit der Seiten ad, aδ (§. 16, 1), zugleich nach §. 20, 1. eine solche Identität beider Dreiecke hervorgeht, in Folge deren ab=βδ=bd ist.

3. Wenn in einem sphär. Dreiecke, hik ein Winkel i größer ist, als ein anderer k, so ist auch die dem größern Winkel gegenüberliegende Seite hk größer, als die dem kleineren gegenüberstehende hi. Fig. 10.

Denn man kann sich den größeren Winkel i allemal durch einen, die gegenüberliegende Seite hk in irgend einem Punct v schneidenden, Normalkreisbogen iv so getheilt vorstellen, daß der Winkel vik=k ist; alsdann sind im Dreiecke kvi die Seiten vi=vk (2), folglich, da vi+vh>hi (§. 18, 1) ist auch vk+vh>hi d. i. hk>hi.

4. Wenn umgekehrt in einem sphär. Dreiecke zwei Seiten ungleich sind, so steht der größern auch der größere, der kleinern der kleinere Winkel gegenüber.

Denn setzt man im Dreieck hik die Seite hk>hi, so kann weder i=k sein, weil sonst auch hi=hk wäre (2), noch kann i<k sein, weil sonst, wieder gegen die Voraussetzung, hk<hi sein müßte (3); es kann daher nur i>k statt finden.

§. 22.

1. In jedem sphär. Dreiecke abd, das zwei Supplementarseiten, ab, bd hat, ist allemal der durch die Verlängerung der Grundlinie ad gebildete Außenwinkel bae, gleich dem innern gegenüberstehenden an der Grundlinie liegenden Winkel d. Fig. 12.

Denn man verlängere die dem Außenwinkel nicht anliegende Supplementarseite bd über die Spitze b hinaus, bis sie die verlängerte Grundlinie in e schneidet, so ist be+bd=ba+bd=180° (§. 6, 5) also be=ba, daher auch Winkel e=bae (§. 21, 1) also, wegen e=d (§. 11, 11) auch bae=d.

2. Es sind daher auch in jedem sphär. Dreiecke abd, worinn zwei Supplementarseiten ab, bd, die beiden Winkel bad, bda an der Grundlinie ad zwei Supplementarwinkel.

Denn da der Außenwinkel bae=bda ist und bae+bad=180°, so ist auch bda+bad=180°.

3. Wenn umgekehrt in einem sphär. Dreiecke zwei Supplementarwinkel sich befinden, so sind auch die beiden denselben gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks zwei Supplementarseiten.

Denn man setze im Dreiecke abd die Winkel bad+bda=180° und verlängere die ihnen beiden anliegende ad nebst einer zweiten Seite db, bis sie sich

aufs neue in e schneiden, so ist bad + bae = bad + bda = 180°, also bae = bda, mithin auch (§. 11, 11) bae = bea, daher ferner be = ba (§. 21, 2) und folglich be + bd = ba + bd = 180°.

Fig. 13. 4. Wenn in einem sphär. Dreiecke abd zwei Seiten ab, bd zusammengenommen kleiner als 180° sind, so ist allemal der durch die Verlängerung der dritten Seite ad entstehende Außenwinkel bae größer als der innere an derselben Seite ihm gegenüberliegende Winkel d.

Denn wenn auch die dem Außenwinkel nicht anliegende Seite db, bis sie die ad in e schneidet, verlängert wird, so ist be + bd = 180°, folglich, da ab + bd < 180°, ab < be, daher Winkel bae > bea (§. 21, 4) also auch (§. 11, 11) bae > d.

5. Es sind daher auch, wenn in einem sphär. Dreiecke bad zwei Seiten ab, bd zusammen kleiner als 180° sind, die denselben gegenüberliegenden Winkel, bda, bad an der dritten Seite, ad zusammen kleiner als 180°.

Denn da der Außenwinkel bae > bda ist, und bae + bad = 180°, so muß bda + bad < 180° sein.

6. Umgekehrt, wenn in einem sphär. Dreiecke zwei Winkel zusammen kleiner als 180° sind, müssen auch die beiden denselben gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks zusammen weniger als 180° betragen.

Denn setzt man im Dreiecke abd die Winkel bad + bda < 180° und verlängert die ihnen beiden anliegende ad, so ist, da bad + bae = 180°, bae > bda. Wird demnächst auch die dem Außenwinkel nicht anliegende bd, bis sie die ad in e schneidet, verlängert, so ist auch (§. 11, 11) bae > bea, folglich be > ab (§. 21, 3) und wegen be + bd = 180°, ist folglich ab + bd < 180°.

7. Wenn in einem sphär. Dreiecke abe zwei Seiten ab, be zusammen größer als 180° sind, so ist allemal der durch die Verlängerung der dritten Seite ae erzeugte Außenwinkel bad kleiner als der innere an eben der Seite ihm gegenüberliegende Winkel bda.

Denn wenn auch be bis in d verlängert wird, so hat man bd + be = 180°, also ab > bd, daher Winkel bad < bda (§. 21, 4) also auch (§. 11, 11) bad < bea.

8. So oft daher in einem sphär. Dreiecke abe zwei Seiten ab, be zusammen größer als 180° sind, müssen auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel bea, bae zusammen größer als 180° sein.

Denn da Wkl. bad < bea und bae + bad = 180°, so ist bae + bea > 180°.

9. Wenn umgekehrt zwei Winkel eines sphär. Dreiecks zusammen größer als 180° sind, so müssen auch die ihnen gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks zusammen größer als 180° sein.

Denn man setze im Dreiecke abe Winkel $bea+bae>180°$, so ist der Außenwinkel $bad>bea$, also auch nach gehöriger Verlängerung der eb, $bad<bda$ (§. 11, 11) daher $ba>bd$ (§. 21, 3) und demnach, wegen $bd+be=180°$, $ba+be>180°$.

10. Wenn in einem gleichschenkligen sphär. Dreieck ein jeder der gleichen Schenkel entweder kleiner oder größer als ein Quadrant ist, so ist auch jeder der gleichen Winkel an der Grundlinie im ersten Fall ein spitzer, im zweiten Fall ein stumpfer Winkel.

(Verm. S. 5 und 8).

11. Wenn umgekehrt in einem sphär. Dreiecke, das zwei gleiche Winkel hat, mithin auch gleichschenklich ist (§. 21, 2), ein jeder der gleichen Winkel entweder spitz oder stumpf ist, so ist auch von den gleichen Schenkeln ein jeder im ersten Falle kleiner, im andern Falle größer als ein Quadrant.

(Verm. S. 6 und 9).

§. 23.

1. Wenn aus zwei Sphärenpuncten a und α, deren Entfernung auf der Sphäre durch den Normalkreisbogen $a\alpha=q$ ausgedrückt wird, mit den Halbmessern auf der Sphäre $ad=ad'=r$ und $\alpha\delta=\alpha\delta'=\varrho$ zwei Sphärenkreise $dmd'n$ und $\delta m\delta' n$ beschrieben werden, so müssen dieselben sich jedesmal schneiden, wenn von den genannten Größen q, r, ϱ jede zwei zusammen genommen größer als die dritte, und dabei alle drei zusammen kleiner als ein ganzer Normalkreis sind; und zwar müssen die beiden Durchschnittspuncte m und n auf verschiedenen Seiten des durch a und α gehenden Normalkreises $a\alpha dz\delta'$ liegen. Fig. 14.

Denn zuvörderst muß jede der Größen q, r, ϱ kleiner als ein Halbnormalkreis sein, weil, wenn dieses nicht statt fände, vermöge der ersten Voraussetzung, im Widerspruche mit der zweiten, alle drei Größen zusammen größer als ein ganzer Normalkreis wären. Durch die Puncte a und α kann also nur ein einziger Normalkreis $a\alpha dz\delta'$ hindurch gehen (§. 6, 9), der beide aus a und α beschriebene Sphärenkreise und die ganze Sphäre halbirt (§. 7, 3 und 9). Er werde von dem aus a beschriebenen Sphärenkreise in d und d' geschnitten, so liegt ein Bogen dad'

desselben mit dem Pol a zugleich in dem einen, hier obern, der andere Bogen d z d' im untern Theil der durch den aus a beschriebenen Kreis getheilten Sphäre.

Die Puncte, in welchen der zweite aus α zu beschreibende Kreis den durch a und α gehenden Normalkreis schneidet, sind begreiflich eben so wie beim ersten Kreise durch die Endpuncte des zugehörigen Halbmessers ϱ gegeben, wenn man diesen von α aus zu beiden Seiten in entgegengesetzter Richtung auf den Normalkreis aufträgt. Nimmt man nun in der Richtung αa, nehmlich auf eben der Seite des Puncts α, auf welcher der Bogen αa liegt, den Bogen $\alpha\delta' = \varrho$, daß mithin δ' der eine jener beiden Durchschnittspuncte ist, so muß dieser Punct δ' jedesmal zwischen den Endpuncten d und d' des Normalkreisbogens d a d' im obern Theil der Sphäre zu liegen kommen; denn fiele δ' mit d' zusammen, oder über d' hinaus zwischen die Endpuncte des Normalkreisbogens d' δ d im untern Theil der Sphäre, oder gar bis in d und weiter, so wäre offenbar im ersten Fall $\alpha\delta' = a\alpha + ad'$ d. h. $\varrho = q + r$, in den übrigen Fällen wäre $\alpha\delta' > a\alpha + ad'$ d. h. $\varrho > q + r$, beides gegen die erste Voraussetzung, nach welcher $\varrho < qr$ sein muß. — Nimmt man dagegen in der entgegengesetzten Richtung αd δ den Bogen $\alpha\delta = \varrho$, wo also δ der zweite jener beiden Durchschnittspuncte ist, so muß derselbe allemal zwischen den Endpuncten des Normalkreisbogens d z d' im untern Theil der Sphäre zu liegen kommen; denn fiele δ noch vor d oder auf d selber, so wäre in jenem Fall $\alpha\delta + a\alpha < ad$ d. h. $\varrho + q < r$, in diesem wäre $\alpha\delta + a\alpha = ad$ d. h. $\varrho + q = r$, beides wieder gegen die erste Voraussetzung. Eben so wenig kann δ bis an d' oder gar noch über d' hinaus fallen, weil sonst der zweiten Voraussetzung entgegen $\alpha\delta + ad' + a\alpha$ d. h. $\varrho + r + q$ eben so groß oder selbst noch größer als der Normalkreis sein würden.

Es müssen mithin die Puncte δ' und δ des aus α mit dem Radius ϱ zu beschreibenden Kreises auf verschiedenen Seiten des aus a mit dem Radius r beschriebenen Kreises d m d' n fallen und der Endpunct des Radius ϱ, indem mit ihm aus α der durch δ' und δ gehende Kreis beschrieben wird, muß folglich, um in der diesseitigen Sphärenhälfte vom Puncte δ' aus dem obern Theil der Sphäre zum Puncte δ im untern, und um von diesem auf der jenseitigen Sphärenhälfte wiederum zurück nach δ' im obern Theil zu gelangen, nothwendig zweimal durch die Peripherie des aus a beschriebenen Kreises, nehmlich in irgend zwei Puncten, m und n derselben, die in verschiedenen durch den Normalkreis a α d z δ' getrennten Hemisphären liegen, hindurch treten, d. h. die Peripherien beider aus a und α beschriebener

Sphä-

Sphärenkreiſe werden ſich nothwendig in zwei Puncten m und n auf verſchiedenen Seiten des durch ihre Mittelpuncte gehenden Normalkreiſes durchſchneiden.

2. Zu einem jeden der aus a und α beſchriebenen Kreiſe gehören, ſo wie überhaupt zu jedem Sphärenkreiſe, zwei Pole oder Mittelpuncte und zwei Halbmeſſer (§. 9, 3.). Es ſind nehmlich die Sphärendurchmeſſer az, αζ die Achſen, und außer a und α auch z und ζ die Pole der beiden Kreiſe (§. 7, 1). Der aus a beſchriebene Kreis hat daher außer dem Bogen ad = ad′ auch deſſen Supplement zd = zd′, und der aus α beſchriebene Kreis außer dem Bogen αδ = αδ′ auch deſſen Supplement ζδ = ζδ′ zu ſeinem Halbmeſſer. Zugleich iſt klar, daß der Bogen αdz = aδ′ζ das Supplement von aα = zζ ſey. Außer dem alſo, daß die genannten Kreiſe

1) aus a und α beſchrieben ſind, wo q = aα, r = ad, ϱ = αδ, würden dieſelben offenbar eben ſo wohl auch entſtanden ſein, wenn ſie

2) aus a und ζ, wo q = aδ′ζ, r = ad, ϱ = ζδ, oder

3) aus z und α, wo q = αdz, r = zd, ϱ = αδ, oder endlich

4) aus z und ζ, wo q = zζ, r = zd, ϱ = ζδ iſt, beſchrieben wären. — Dieſe vierfache Zuſammenſtellung der Größen q, r, ϱ und die eben ſo vielfache Entſtehungsweiſe findet unfehlbar bei jeden zwei Sphärenkreiſen, ſelbſt auch dann ſtatt, wenn ſie Parallelkreiſe ſind, alſo ſtatt vier verſchiedener nur zwei gemeinſchaftliche Pole haben (§. 7, 2); nur daß alsdann q theils = o, theils = dem Maximum der Entfernung auf der Sphäre = 180° iſt. So können z. B. in Fig. 4. die zu den gemeinſchaftlichen Polen p und q gehörigen Parallelkreiſe falg, tvxz zuſammen entweder mit den Radien pf und pt, oder pf und qt, oder qt und qf, oder endlich mit qf und pt beſchrieben werden.

3. Ueberhaupt iſt es klar, wenn man von den vier Zuſammenſtellungen, welche bei zwei Sphärenkreiſen in Hinſicht der allgemein durch q, r und ϱ ausgedrückten Größen möglich ſind, irgend eine, welche es auch ſein möge, als Normalzuſammenſtellung beſonders heraus hebt, und in ihr das q durch Q, r durch R, ϱ durch P bezeichnet, daß ſodann jede der drei übrigen Zuſammenſtellungen aus einer dieſer drei Größen und den Supplementen der beiden andern beſteht, ſo daß, wenn man zugleich die Supplemente der drei Größen Q, R, P nach der Reihe mit sQ, sR, sP bezeichnet, die mit der Normalzuſammenſtellung: Q, R, P zuſammen gehörigen drei andern Verbindungen die folgenden ſind:

sQ, R, sP
sQ, sR, P
$Q, sR, sP.$

4. Es sei nun bei zwei Sphärenkreisen ein q mit den zugehörigen r und ϱ zusammen dem Normalkreise gleich; man setze also: 1) $Q+R+P=360°$, so hat man hiemit auch: a) $Q-180°+R+P=180°$ und b) $Q-180°+R=180-P$; und daraus:

$$R=180°-Q+180-P, \text{ d. h.:}$$
$$2)\ R=sQ+sP.$$

Aus der Gleichung a) hat man aber auch: $Q-180°+P=180°-R$ und hiemit:

$$P=180°-Q+180°-R, \text{ d. h.}$$
$$3)\ P=sQ+sR.$$

Endlich giebt auch die Gleichung b) sogleich die folgende:

$$Q=180°-R+180°-P, \text{ d. h.}$$
$$4)\ Q=sR+sP.$$

Es ist klar, daß die Gleichungen 1—4 in solchem Zusammenhange stehen, daß aus jeder einzelnen die übrigen nothwendig folgen. Allgemein beweisen sie also folgendes:

Wenn bei zwei Sphärenkreisen irgend ein q mit den zugehörigen Halbmessern r und ϱ zusammen dem Normalkreise gleich ist, so sind in jeder der drei übrigen Zusammenstellungen von den jedesmaligen zusammen gehörigen Größen q, r, ϱ zwei derselben zusammen eben so groß als die dritte. Und umgekehrt so oft in irgend einer Verbindung von den zusammen gehörigen Größen q, r, ϱ die Summe von zweien gleich der dritten ist, so ist dies auch in zwei der übrigen Verbindungen der Fall und in der vierten sind endlich q, r und ϱ zusammen dem Normalkreise gleich.

5. Es sei ferner bei zwei Sphärenkreisen ein q mit den zugehörigen r und ϱ zusammen größer als der Normalkreis, man setze demnach 1) $Q+R+P>360°$, so ist auch a) $Q-180°+R+P>180°$ und b) $Q-180°+R>180°-P$; daher:

$$R>180°-Q+180°-P, \text{ d. h.}$$
$$2)\ R>sQ+sP.$$

Aus der Gleichung a) folgt auch $Q-180°+P>180°-R$; und hieraus

$$P>180°-Q+180°-R, \text{ d. h.}$$
$$3)\ P>sQ+sR.$$

Endlich hat man auch mit der Gleichung b) sogleich die folgende:

$$Q > 180° - R + 180° - P, \text{ d. h.}$$

$$4)\ Q > sR + sP.$$

Aus jeder der Gleichungen 1—4 folgen die drei übrigen; sie verbürgen mithin gemeinschaftlich folgendes:

Wenn bei zwei Sphärenkreisen irgend ein q mit den zugehörigen r und ϱ größer als der Normalkreis ist, so ist in jeder der drei übrigen Verbindungen von den jedesmaligen zusammen gehörigen q, r und ϱ die Summe aus zweien derselben kleiner als die dritte Größe. Und umgekehrt, wenn letzteres in einer der vier Zusammenstellungen statt findet, so findet es auch in zwei anderen statt und in der vierten ist die Summe der Größen q, r, ϱ größer als der Normalkreis.

6. Wenn aus zwei Sphärenpuncten, deren Entfernung auf der Sphäre durch den Normalkreisbogen q bestimmt ist, mit den Halbmessern auf der Sphäre r und ϱ zwei Sphärenkreise beschrieben werden, so müssen

1) dieselben sich jedesmal in einem Puncte berühren oder auch in allen Puncten zusammenfallen und identisch werden, wenn entweder von den Größen q, r, ϱ zwei zusammen eben so groß als die dritte, oder wenn alle drei zusammen dem Normalkreise gleich sind; und zwar muß der Berührungspunct jedesmal im Bogen q oder in dessen Verlängerung liegen. — Und umgekehrt so oft zwei Sphärenkreise sich in einem Puncte berühren, müssen von den Größen q, r, ϱ zwei eben so groß als die dritte, oder alle drei müssen gleich dem Normalkreise sein und die nach dem Berührungspuncte gezogenen Halbmesser der Kreise müssen einer des andern Verlängerung sein.

Es werden hingegen

2) die Peripherien der Kreise gar keinen Punct mit einander gemein haben, wenn von den Größen q, r, ϱ zwei zusammen kleiner als die dritte, oder auch wenn alle drei zusammen größer als der Normalkreis sind. — Und umgekehrt so oft die Peripherien zweier Sphärenkreise gar keinen Punct mit einander gemein haben, so muß irgend ein Paar der Größen q, r, ϱ zusammen kleiner sein, als die dritte Größe, oder alle drei müssen zusammen genommen größer als der Normalkreis sein.

In keinem der vorstehenden Sätze ist, wie man alsbald übersieht, durch die Voraussetzungen an und für sich schon die Nothwendigkeit, daß von den Größen q, r, ϱ jede einzelne kleiner als 180° sei, unmittelbar so wie in S. 1. gegeben. Daß die Halbmesser r und ϱ wird indeß diese Eigenschaft schon nach den ersten Be-

griffen über den Sphärenkreis erfordert (§. 9, 3) und q d. h. die Entfernung der Mittelpuncte, muß, wenn die letzteren nicht die Endpuncte eines und desselben Sphärendurchmessers sind, gleichfalls immer durch einen Bogen, der kleiner als 180° ist, ausgedrückt werden (§. 8, 3); aber eben die zuletzt erwähnte Clausel, welche bei den Bedingungen in S. 1. ganz von selbst fortfiel, kann hier vorkommen, daß nehmlich q ein Halbnormalkreis ist. So oft dies aber der Fall ist, sind beide Kreise Parallelkreise (§. 7, 2), und in Beziehung auf diese sind alle obige Sätze so evident, daß der Beweis derselben keiner Erörterung bedarf.

Nach der Beseitigung dieses Umstandes werden also jetzt die Beweise zugleich mit unter der Voraussetzung, daß nicht nur r und ϱ einzeln, sondern jedesmal auch q kleiner als 180° sei, durchgeführt werden.

Fig. 15. **Beweis** 1. Es seien de und df zwei Sphärenkreise, deren Mittelpuncte bei jenem a und z, bei diesem α und ζ, und es sei irgend eins unter den vier möglichen q so groß, als die Summe der zugehörigen Halbmesser r und ϱ, nehmlich αdz=zd+αd, so ist klar, daß diese beiden Halbmesser nothwendig in q=αdz im Puncte d zusammenstoßen und daß d ein gemeinschaftlicher Punct der beiden Kreise sein müsse. Daß aber dieser Punct nur der einzige sein könne, den sie mit einander gemein haben, erhellt aus den Widersprüchen, welche die Annahme des Gegentheils mit sich führt. Denn setzt man außer d noch irgend einen zweiten gemeinschaftlichen Punct x, so wären die nach x gezogenen und dort zusammenstoßenden Halbmesser zx=zd, αx=αd und man hätte zx+αx=zd+αd=αdz; nun könnte aber keiner der Bogen zx, αx des andern Verlängerung sein, weil sonst durch die Puncte z und α, ungeachtet dieselben mit dem Sphärencentrum nicht in gerader Linie liegen, zwei verschiedene Normalkreise gehen würden, gegen §. 6, 8; es müßten daher zx und αx mit αdz ein sphär. Dreieck bilden, in welchem aber, ungeachtet jede Seite kleiner als ein Halbnormalkreis, dennoch die Seiten zx und αx zusammen nur eben so groß als die dritte αdz wären, welches dem §. 18, 1, schlechthin widerstreitet. — So oft also bei zwei Sphärenkreisen ein q=r+ϱ, müssen sich die Kreise nothwendig in einem einzigen Puncte, welcher in dem durch die Mittelpuncte der Kreise gehenden Normalkreise liegt, berühren, folglich muß eben das bei zwei Sphärenkreisen auch dann geschehen, wenn ein q+r=ϱ oder ein q+ϱ=r oder auch ein q+r+ϱ=360° ist, denn wenn die eine oder andere der drei letzten Voraussetzungen gilt, so muß verm. §. 4. jedesmal auch ein q=r+ϱ sein. —

Wenn umgekehrt zwei Sphärenkreise de, df in einem Puncte d sich berühren, so bilden zuvörderst die nach d gezogenen Halbmesser zd, αd einen einzigen Normalkreisbogen, sind einer des andern Verlängerung. Denn wäre dieses nicht, so könnte man zwischen den Mittelpuncten z und α einen einzigen Normalkreisbogen ziehen, mit welchem zd und αd ein Dreieck bilden würden, worin jede Seite kleiner als 180° wäre. Da nun d der einzige gemeinschaftliche Punct der Kreise ist, so würde jener Bogen die Peripherie derselben in zwei verschiedenen Puncten x und y schneiden, also aus den Halbmessern zx=zd, αy=αd und aus dem zwischen x und y befindlichen Bogen xy bestehen, folglich größer als zd+αd sein, oder diese beiden Seiten zusammen wären in jenem sphär. Dreiecke kleiner als die dritte Seite zxya, gegen §. 18, 1. Es müssen also zd und αd einer des andern Verlängerung sein; dann aber ist folglich der Bogen αdz das mit diesen Halbmessern zusammengehörige q und es ist mithin dieses q=r+ϱ. Also ist, verm. S. 4. überhaupt, so oft zwei Sphärenkreise sich in einem Puncte berühren, in jeder der vier möglichen Zusammenstellungen der Größen q, r, ϱ entweder die Summe von zweien gleich der dritten oder alle drei sind = 360°. So hat man z. B. außer αdz=zd+αd, auch bei einem zweiten q=aα, die Größen aα+αd=ad, nehmlich r=q+ϱ; bei einem dritten q=zζ ist ζd=zζ+zd nehmlich ϱ=q+r; endlich beim vierten q=afeζ ist afeζ+ad+ζd=360°=q+r+ϱ.

Beweis 2. Es seien gh, ik zwei Sphärenkreise, deren Mittelpuncte a und z, α und ζ, und bei denen irgend ein q größer als die Summe der zugehörigen r und ϱ, nehmlich αdz>zg+αi, so ist an und für sich klar, daß g und i immer zwei verschiedene Puncte sein müssen; es erhellt aber auch leicht, daß die Peripherien der beiden Kreise überhaupt keinen einzigen Punct gemein haben können; denn gäbe es einen solchen Punct x, so würden die Halbmesser zx, αx mit αdz ein sphärisches Dreieck bilden, in welchem jede Seite kleiner als ein Halbnormalkreis und dennoch offenbar die eine Seite αdz größer als die Summe der beiden andern zx und αx wäre, gegen §. 18, 1. So oft also bei zwei Sphärenkreisen ein q>r+ϱ, so haben die Peripherien gar keinen Punct mit einander gemein, folglich muß letzteres überhaupt allemal statt finden, es mögen von den drei Größen q, r, ϱ irgend zwei zusammen kleiner als die dritte, oder auch alle drei größer als der Normalkreis sein; denn unter der einen sowohl als der andern dieser Bedingungen ist verm. S. 5. allemal ein q>r+ϱ.

Wenn umgekehrt die Peripherien zweier Sphärenkreise gh, ik gar keinen Punct mit einander gemein haben, so ist klar, daß bei denselben unfehlbar ein q größer als die zugehörigen r und ϱ sein müsse, nehmlich adz > zg + αi; folglich müssen alsdann auch in jeder der vier möglichen Verbindungen der Größen q, r, ϱ verm. S. 5, entweder zwei zusammen kleiner als die dritte oder alle drei zusammen größer als 360° sein. So ist z. B. außer adz > zg + αi auch bei q = aα, adg > aα + αi nehmlich r > q + ϱ, desgl. bei q = zζ ist ζdi > zζ + zg nehmlich ϱ > + qr, endlich beim vierten q = afeζ ist afeζ + adg + ζdi = q + r + ϱ > 360°.

7. Der zu Anfang dieses Sphen erwiesene Satz 1. ist also auch umgekehrt wahr, nehmlich:

Wenn zwei Sphärenkreise sich schneiden, so müssen von den Größen q, r, ϱ in jeder der vier möglichen Zusammenstellungen allemal jede zwei zusammen genommen größer als die dritte und zugleich alle drei zusammen kleiner als der ganze Normalkreis sein, und die beiden Durchschnittspuncte müssen zu verschiedenen Seiten des durch die Pole der Kreise gehenden Normalkreises liegen.

Denn wären in irgend einer der vier Verbindungen von den Größen q, r, ϱ, irgend zwei zusammen eben so groß als die dritte oder alle drei zusammen eben so groß als der Normalkreis, so würden die Kreise sich nicht schneiden, sondern nur in einem Punct sich berühren (S. 6.). Wären ferner irgend zwei der Größen q, r, ϱ zusammen kleiner als die dritte, oder wären alle drei zusammen größer als der Normalkreis, so würden die Kreise vollends gar keinen Punct mit einander gemein haben (S. 6.). Es müssen also in jeder der vier Zusammenstellungen der Größen q, r, ϱ, jede zwei der letzteren zusammen größer als die dritte und zugleich alle drei Größen zusammen kleiner als der Normalkreis sein, woraus zugleich das in Hinsicht der Lage der Durchschnittspuncte bemerkte aus denselben Gründen wie in S. 1. hervorgeht.

§. 24.

Fig. 10. 1. Wenn in zwei sphär. Dreiecken abd und efg oder abd und hik alle drei Seiten der Reihe nach gleich sind, nehmlich ab = ef = hi, bd = fg = ik, ad = eg = hk, so sind die Dreiecke identisch.

Denn legt man die Dreiecke abd, efg so aufeinander, daß zwei gleiche Seiten bd und fg mit den homologen Endpuncten f und b, g und d sich decken, so muß auch das dritte Paar Puncte e und a sich decken. Denn fiele e irgend wo anders hin, als auf a, so hätte man, nachdem a und e durch den Normalkreisbogen

ae verbunden wären, be=fe=ba und de=ge=da, also in den gleichschenkligen Dreiecken abe und ade einmal die Winkel bae=bea und dann die Winkel dae=dea (§. 21, 1). Der offenbare Widerspruch dieser Folgerungen hebt die Annahme auf, aus der sie fließen. Es kann also nur e auf a fallen und die Dreiecke sind congruent und identisch. — Sind die Dreiecke von entgegengesetzter Converitär, wie abd und hik, so folgt ihre Identität aus der auf gleiche Weise demonstrirten Congruenz zwischen hik und dem Gegendreiecke des Dreiecks abd (§. 16, 3).

2. Mit drei Seiten, sofern dieselben nur den durch die Natur des sphär. Dreiecks vorgeschriebenen Forderungen entsprechen, ist also immer ein sphär. Dreieck gesetzt, worin zugleich jeder der drei Winkel kleiner als 180° ist. Jene Forderungen bestehen hier verm. §. 18. darin: daß jede zwei Seiten zusammen größer als die dritte, und daß alle drei Seiten zusammen kleiner als 360° seien, welche Bedingungen zugleich die früher ein für allemal zum Grunde gelegte, daß jede einzelne Seite kleiner als 180° sei, in sich schließen.

Aufgabe. Es seien also drei den so eben angeführten Forderungen entsprechende Normalkreisbogen aα, aδ'd' und αdδ gegeben, das durch sie bestimmte sphär. Dreieck soll verzeichnet werden. Fig. 14.

Aufl. u. Beweis. Man nehme willkührlich einen der gegebenen Bogen, aα, beschreibe aus seinen Endpuncten mit den beiden andern Bogen aδ'd' und αdδ zwei Sphärenkreise dmd'n, δmδ'n, so werden sich dieselben in Folge der angegebenen Bedingungen unfehlbar zu beiden Seiten des Bogens aα in m und n durchschneiden (§. 23, 1) und man darf also nur den einen dieser Durchschnittspuncte, m mit den Endpuncten des Bogens aα durch die Normalkreisbogen am, αm verbinden, so schließen diese ein sphär. Dreieck amα ein, das verm. der Construction die gegebenen Seiten enthält, und in welchem zugleich, verm. §. 14, 4, jeder Winkel kleiner als 180° ist.

3. Es ist für sich klar, daß wenn in der obigen Construction zwei der gegebenen Bogen gleich sind, wiederum ein gleichschenkliges Dreieck entstehen müsse; wenn aber alle drei Bogen gleich sind, so entsteht ein gleichseitiges sphär. Dreieck, in welchem verm. §. 21, 1 auch alle drei Winkel gleich sind und verm. §. 22, 10 sind darin zugleich alle drei Winkel spitz oder stumpf, je nachdem jede der drei gleichen Seiten kleiner oder größer als ein Quadrant ist.

§. 25.

Fig. 16. 1. Aufgabe. Einen gegebenen Normalkreis afbm in vier gleiche Theile zu theilen, oder die Endpuncte eines Viertelnormalkreises zu bestimmen.

Aufl. u. Beweis. Man lege durch einen Punct a des gegebenen Normalkreises unter einem beliebigen Winkel einen Normalkreisbogen ak, verlängere diesen, bis er den zu theilenden Kreis zum zweitenmal in b schneidet, so ist sowohl akb als afb ein Halbnormalkreis (§. 6, 5). Man schneide auf letzterem, von den Endpuncten a und b aus, zwei gleiche Stücke ad=be von beliebiger Größe ab und construire über dem dritten zwischen beiden liegendem de, auf jeder Seite desselben, nach §. 24, 3 ein gleichschenkliges oder gleichseitiges sphär. Dreieck dge, dhe. Durch die Spitzen beider Dreiecke ziehe man den Normalkreisbogen gh, der de in f schneidet, so sind, verm. der Construction nach §. 24, 1, die Dreiecke ghd, ghe identisch, folglich auch die Winkel dgf, egf gleich, daher ferner die Dreiecke gfd, gfe nach §. 19, 1 identisch und deshalb df=ef, mithin auch ad+df=be+ef d. h. af=bf=90°.

2. Aufgabe. Es sollen die zu einem gegebenen Normalkreise oder Normalkreisbogen afb gehörigen Pole gefunden werden.

Aufl. u. Beweis. Man construire über einem beliebigen Stücke de des gegebenen Kreises oder Bogens, welches kleiner als ein Halbnormalkreis ist, auf derjenigen Seite, auf welcher der zugehörige Pol bestimmt werden soll, nach §. 24, 3 ein gleichschenkliges Dreieck dke, in welchem jede der gleichen Seiten dk, ek ein nach S. 1. bestimmter Viertelnormalkreis ist, so ist, verm. §. 9, 6 die Spitze k dieses Dreiecks der gesuchte Pol.

3. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punct f eines Normalkreises oder Normalkreisbogens afb auf diesem einen senkrechten Normalkreisbogen zu errichten.

Aufl. u. Beweis. Man suche den zum gegebenen Bogen oder Kreise gehörigen Pol k (2) und ziehe durch diesen und den bestimmten Punct f einen Normalkreisbogen kf, so ist dieser das gesuchte Perpendikel verm. §. 7, 6.

4. Durch einen und denselben Punct f eines Normalkreises oder Normalkreisbogens afb können nicht zwei oder mehrere der Lage nach verschiedene Normalkreisbogen senkrecht auf ihm stehen, weil der Punct f und der Pol k des Bogens afb, durch welchen zugleich jedes Perpendikel auf letzterem gehen muß, der Lage nach nur einen einzigen Normalkreis bestimmen (§. 6, 9).

5. Auf

5. Aufgabe. Durch einen außerhalb eines Normalkreisbogens afb befindlichen Punct g, der kein Pol dieses Bogens ist, auf letzteren oder dessen Verlängerung ein Perpendikel zu fällen.

Aufl. u. Beweis. Man suche auf eben der Seite, auf welcher g liegt, den Pol k des Bogens afb und ziehe durch g und k den Normalkreisbogen kgf, so steht derselbe verm. §. 7, 6 auf afb oder dessen Verlängerung senkrecht.

6. Von einem und demselben Punct g, der kein Pol des Normalkreisbogens afb ist, können auf diesen oder dessen Verlängerung aus eben dem Grunde, wie in §. 4. nicht zwei oder mehr der Lage nach verschiedene Normalkreisbogen senkrecht gezogen werden.

Man kann zwar von g nach entgegengesetzten Seiten auf afb und dessen Verlängerung die beiden Perpendikelbogen gf und gkm ziehen, von denen der eine kleiner, der andere größer als der Quadrant kf ist, und die sich beide zu einem Halbkreise ergänzen; aber diese Bogen gehören zu einem und demselben durch die Puncte g und k der Lage nach bestimmten Normalkreise und sind mithin der Lage nach nicht von einander verschieden.

Aus dem zu einem Bogen afb gehörigen Pol k selbst können dagegen auf jenen unzählig viel der Lage nach völlig verschiedene Perpendikelbogen ka, kd, kf u. s. m. gezogen werden, und zwar muß jeder derselben ein Quadrant sein (§. 9, 4).

7. Aus jedem Puncte g in einem Schenkel dg eines sphär. Winkels gdb, wenn dieser Punct nur nicht der Scheitelpunct des Winkels selber oder seines Polarwinkels und dabei vom Pol k des andern Schenkels db verschieden ist, sind also allemal zum letzteren zwei Perpendikalbogen gf und gkm möglich, die beide einem Perpendikel $fgkm = 180°$ angehören, und von denen eben deshalb (§. 6, 5) offenbar der eine gf, zwischen dem Scheitel d und dem Durchschnittspunct f, auf dem anderen Schenkel eine Abscisse $df < 180°$ bestimmt, während der andere, zwischen d und dem Durchschnittspunct m, auf dem andern Schenkel eine Abscisse $dfbm > 180°$ bildet. Jener Bogen, gf, dem die kleinere Abscisse, $df < 180°$ angehört, heiße in der Folge ein **Perpendikalbogen vor der Oeffnung des Winkels gdb**; der andere, gkm mit der größeren Abscisse $dfbm > 180°$ zusammengehörig, werde dagegen ein **Perpendikelbogen hinter der Oeffnung des Winkels gdb** genannt. — Hiemit ist klar, daß ein Perpendikelbogen hinter der Oeffnung eines Winkels allemal zugleich ein Perpendikelbogen vor der Oeffnung des Nebenwinkels von jenem sein müsse und vice

versa —. Wie z. B. gkm ein Perpendikelbogen vor der Oeffnung des stumpfen Winkels gda, der Bogen gf aber ein Perpendikelbogen hinter der Oeffnung desselben Winkels gda ist.

§. 26.

Fig. 16. 1. Wenn durch einen Winkelpunct g eines sphär. Dreiecks dge ein Normalkreisbogen gf auf der gegenüberliegenden Seite de senkrecht steht und zugleich diese Seite oder den Winkel in g halbirt, so muß das Dreieck gleichschenklig, nehmlich die beiden andern Seiten dg, eg desselben, und also auch die Winkel in d und e, müssen gleich sein.

Denn die Dreiecke afg, efg sind, wenn df=ef, nach §. 19, 1, wenn dgf=egf, nach §. 20, 1 identisch, und es ist folglich dg=eg.

2. Wenn ein sphär. Dreieck dge gleichschenklig ist, und es ist durch die Spitze g desselben ein Normalkreisbogen gf so gezogen, daß er entweder den Winkel in g oder die gegenüberstehende Seite dfe halbirt, so steht er in beiden Fällen auf der Grundlinie dfe senkrecht und halbirt das ganze Dreieck.

Denn die Dreiecke dfg, efg sind, wenn die Winkel in g gleich sind, nach §. 19, 1, wenn die Bogen df, ef gleich sind, nach §. 24, 1 identisch und von den gleichen Nebenwinkeln dfg, efg ist folglich in beiden Fällen jeder ein rechter Winkel.

3. Wenn ferner ein sphär. Dreieck dge gleichschenklig und dabei die Spitze g desselben nicht der Pol der gegenüberstehenden Seite dfe ist, so muß allemal der aus g auf die Grundlinie dfe senkrecht gezogene Normalkreisbogen gf den Winkel in g nebst der Basis dfe und das ganze Dreieck halbiren.

Denn gf muß zugleich durch den Pol k der Basis dfe gehen (§. 7, 6) und wenn man noch die Bogen kd, ke supponirt, deren jeder ein Quadrant ist (§. 9, 4), so hat man, verm. §. 24, 1 die identischen Dreiecke dkg, ekg und in ihnen die Winkel dgk=egk, folglich auch deren Nebenwinkel dgf=egf, daher auch die Dreiecke dfg, efg nach §. 19, 1 identisch und df=ef. — Wenn aber g vom Pol der Basis nicht verschieden wäre, so würden aus g unzählig viel Perpendikel auf die Basis gezogen werden können, ohne daß diese oder der Winkel in g dadurch halbirt würde (§. 25, 6).

4. Es muß ferner ein aus der Mitte f eines Normalkreisbogens dfe auf demselben errichtetes Perpendikel fk allemal durch die Spitze g eines jeden über der

nehmlichen Basis dfe befindlichen gleichschenkligen sphär. Dreiecks dge hindurchgehen und den Winkel an der Spitze g so wie das ganze Dreieck halbiren.

Denn der aus g nach f gezogene Bogen fg steht senkrecht auf dfe (2), also muß fk mit fg der Lage nach zusammenfallen (§. 25, 4) oder durch g gehen und der Winkel in g so wie das ganze Dreieck werden nun in Folge der nach §. 19, 1 statt findenden Identität der Dreiecke dfg, efg von fk halbirt.

5. Die Gerade bd, welche die Chorde der Basis bfd eines gleichschenkligen Fig. 17. sphär. Dreiecks abd ist, steht senkrecht auf der Ebene des durch die Spitze des Dreiecks auf die Basis gezogenen Perpendikelbogens mprfq, falls nur nicht die Spitze a der Pol der Basis ist.

Denn wegen bf = df (3) schneidet der Sphärenradius cf die Chorde bd senkrecht in c; es ist aber cf zugleich die von den Ebenen der Bogen bfd und mprfq gebildete Durchschnittslinie, auf der mithin die in der ersteren dieser Ebenen befindliche Chorde bd senkrecht steht, folglich steht sie, da beide Ebenen sich zugleich senkrecht durchschneiden, aus bekannten Gründen der Stereometrie, auch senkrecht auf der andern Ebene.

6. Wenn die Seiten ab, ad eines gleichschenkl. sphär. Dreiecks abd, dessen Spitze a vom Pol der Basis bfd verschieden ist, um gleiche Stücke bi, dk (die kleiner als die Supplemente der Seiten sind) verlängert werden und man verbindet die Endpuncte der letzteren durch einen Normalkreisbogen ilk, der mithin die Basis eines aufs neue entstandenen gleichschenkligen sphär. Dreiecks iak ist, so steht der aus der Spitze a auf die Basis des ersten Dreiecks gefällte Perpendikelbogen mprfq, gehörig verlängert, auch auf der Basis ilk des zweiten senkrecht und die Geraden bd, ik, welche die Sehnen der Grundlinien beider Dreiecke sind, sind parallel.

Denn da zugleich der Winkel in a halbirt wird (3), so sind die Dreiecke ali, alk identisch (§. 19, 1) also in l rechtwinklig, und da mithin die Sehne ik eben so, wie bd, auf der zum Bogen mprfq gehörigen Ebene senkrecht ist (5), so sind beide Sehnen, weil sie auf einer und derselben Ebene senkrecht stehen, auch parallel.

7. Wenn der Pol p eines Sphärenkreises mnrs irgendwo in der Peripherie eines Normalkreises oder Normalkreisbogens mprfq liegt, der aus der Spitze a eines gleichschenkligen sphär. Dreiecks abd auf dessen Grundlinie bfd senkrecht gezogen ist, so ist die Gerade bd, welche die Chorde der Basis bfd ist, allemal pa-

rallel mit der Geraden gh, welche den Sphärenkreis mnrs in einem von den beiden Puncten r oder m, in welchen derselbe von dem Perpendikel mprf durchschnitten wird, berührt, (vorausgesetzt, daß a nicht der zu bfd gehörige Pol sei).

Denn wenn die Gerade rm die Durchschnittslinie ist, in welcher die Ebene des Sphärenkreises mnrs und des Perpendikels mprfq sich schneiden, so ist rm zugleich ein Durchmesser des Sphärenkreises (§. 7, 3), folglich ist auch, nach Gründen der Ebenengeometrie, die Tangente gh in dem Endpuncte r des Durchmessers rm senkrecht auf demselben, und da die Ebene des Sphärenkreises und des Perpendikels sich senkrecht durchschneiden (§. 7, 3), und gh in der einen dieser Ebenen liegt, nehmlich in der Ebene des Sphärenkreises, dessen Tangente sie ist, so muß sie, weil sie auf der Durchschnittslinie rm beider Ebenen senkrecht ist, auch auf der andern Ebene, nehmlich der des Perpendikels mprf senkrecht sein. Also stehen die Chorde bd der Basis, verm. S. 5 und die Tangente gh auf einer und derselben Ebene, nehmlich auf der zu mprf gehörigen Normalkreisebene senkrecht und sind folglich parallel.

§. 27.

Fig. 16. 1. Aufgabe. Einen gegebenen sphär. Winkel dge durch einen Normalkreisbogen zu halbiren.

Aufl. u. Beweis. Man schneide aus der Spitze g des Winkels auf seinen Schenkeln gleiche Stücke dg=eg mit beliebigem Halbmesser, der jedoch kein Viertelnormalkreis und kleiner als ein Halbnormalkreis sein muß, ab, ziehe durch die Endpuncte d und e den Normalkreisbogen dfe und fälle auf diesen aus g das Perpendikel fg, so wird durch letzteres der Winkel halbirt, verm. §. 26, 3.

2. Aufgabe. Einen gegebenen Normalkreisbogen dfe durch einen andern auf ihm senkrechten zu halbiren.

Aufl. u. Beweis. Es wird auf dem gegebenen Bogen, wenn er, wie dfe, kleiner als 180° ist, ein gleichschenkl. sphär. Dreieck dge, dessen Schenkel jedoch keine Quadranten sein dürfen, construirt und aus der Spitze g wird der Perpendikelbogen fg auf dfe gefällt, so muß df=ef sein, verm. §. 26, 3. — Wenn der Bogen größer oder eben so groß als 180° ist, so darf man nur auf beiden Seiten desselben gleich große Stücke abschneiden, so daß der zwischen diesen liegende Bogen kleiner als 180° ist, und diesen eben so wie vorher halbiren, so ist damit auch der ganze Bogen halbirt.

3. Wenn ein Normalkreisbogen dfe, welcher zwischen den Endpuncten eines Nichtnormalkreisbogens dle gezogen, also dessen Sehne auf der Sphäre ist, durch das Perpendikel fg halbirt wird, so muß dieses, gehörig verlängert, auch durch den zu jenem Nichtnormalkreisbogen dle gehörigen Pol n gehen, mithin senkrecht auf ihm stehen und ihn gleichfalls in l halbiren.

Denn die von dem Pol n nach den Endpuncten d und e gezogenen Normalkreisbogen nd, ne bilden mit dfe ein gleichschenkl. sphär. Dreieck dne und das durch die Mitte f der Basis gehende Perpendikel muß durch die Spitze n hindurch gehen, verm. §. 26, 4 und den Winkel in n halbiren, folglich halbirt es auch den Bogen dle, welcher das Maß dieses Winkels ist.

4. Aufgabe. Die zu einem gegebenen Nichtnormalkreise oder Bogen desselben fadgem gehörigen Pole oder Mittelpuncte zu finden. Fig. 4.

Aufl. u. Beweis. Es werden in dem gegebenen Kreise oder Bogen willkührlich drei Puncte a, d, e angenommen und durch zwei Normalkreisbogen dke, are verbunden, darauf werden letztere durch die Perpendikel pkgq, prlq halbirt (2); so müssen diese sich jedesmal schneiden und ihre Durchschnittspuncte p und q sind die gesuchten Pole. Denn wenn sich die Perpendikel nicht schnitten, also einer des andern Verlängerung und gkprl ein und eben derselbe Normalkreisbogen wäre, so müßte, wegen der rechten Winkel in k und r, der Durchschnittspunct e der Pol dieses Bogens sein (§. 7, 7) und es wäre ek=eur=90° (§. 9, 4) also dke=are=180°, welches nicht sein kann, da a und d noch zwei verschiedene Puncte sind und jeder der zuletzt genannten Bogen erst dann, wenn er den andern zum zweitenmal schneidet, ein Halbkreis wird (§. 6, 5). Da mithin der Durchschnitt der Perpendikel pkgq, prlq unfehlbar erfolgt und überdies beide auf dem gegebenen Kreise oder Bogen fadem senkrecht stehen (3), so muß jeder der beiden Durchschnittspuncte p und q ein Pol von fadem sein (§. 7, 7).

5. Aufgabe. Es sind drei, nicht in der Peripherie eines Normalkreises liegende Sphärenpuncte a, d, e gegeben: es soll der durch dieselben gehende Nichtnormalkreis beschrieben werden.

Aufl. u. Beweis. Man verbinde die Puncte, so wie vorhin in S. 4, durch zwei Normalkreisbogen dke, are und halbire diese wieder durch die Perpendikel pkgq, prlq, die sich aus denselben Gründen, wie in S. 4, durchschneiden und in ihren Durchschnittspuncten p und q die Pole des durch a, d, e gehenden

Sphärenkreises fadgem geben, den man also mit dem Halbmesser auf der Sphäre pkg=prl aus p, oder mit qzg=qxl aus q beschreiben kann.

§. 28.

Fig. 10. 1. Wenn in zwei sphär. Dreiecken abd und efg oder abd und hik alle drei Winkel der Reihe nach gleich sind, nehmlich a=e=h, b=f=i, d=g=k, so sind die Dreiecke identisch.

Denn es mögen die beiden Dreiecke, gleichviel, ob sie, wie abd und efg von gleicher, oder, wie abd und hik, von entgegengesetzter Converität sind, durch D und d, das Polardreieck von jenem durch Δ, von diesem durch δ bezeichnet werden: so sind in Δ und δ die Seiten des einen nach der Reihe denen des andern gleich (§. 17, 4), folglich sind Δ und δ identisch (§. 24, 1), daß also auch die Winkel in ihnen nach der Ordnung einander gleich sein müssen. Eben daher sind aber wiederum auch die Seiten in D und d verm. §. 17, 4 nach der Ordnung einander gleich und D und d sind folglich gleichfalls verm. §. 24, 1 identisch.

2. Es bestimmen also auch drei sphärische Winkel, so oft sie nur den zur Natur des sphär. Dreiecks gehörigen Bedingungen (§. 18.) entsprechen, die Individualität eines sphär. Dreiecks, in welchem zugleich jede einzelne Seite kleiner als 180° ist. — Die erwähnten Bedingungen aber sind folgende:

Außerdem daß jeder Winkel, dem allgemeinen Erforderniß gemäß, kleiner als 180° ist, müssen

1) von den einzelnen Supplementen der drei Winkel jede zwei zusammen genommen größer sein, als das dritte (§. 18, 3);

2) die Summe aller drei Winkelsupplemente muß kleiner als 4.90° sein (§. 18, 4).

Mit diesen Bedingungen ist schon analytisch das Erforderniß vereinigt, daß die Summe der drei Winkel selbst kleiner als 6.90° und größer als 2.90° sei (§. 18, 5).

Es entsteht also die

Aufgabe: Aus drei unter den so eben vorgeführten Bedingungen gegebenen sphärischen Winkeln das durch sie bestimmte sphärische Dreieck zu verzeichnen.

Fig. 1. Aufl. u. Beweis. Es sei fpg einer der gegebenen Winkel, so bilde man durch Verlängerung eines Schenkels fp den Nebenwinkel gph und beschreibe aus der gemeinschaftlichen Spitze p mit einem Viertelnormalkreise pfa zwischen die zu dem Ende weit genug verlängerten Schenkel der Nebenwinkel einen Normalkreis-

bogen abnd (§. 9, 5), der verm. §. 6, 5 ein Halbkreis ist, daß also bnd das Supplement des Bogens ab, folglich den Graden ꝛc. nach, auch das Supplement des gegebenen Winkels fpg sein muß, dessen Maß der Bogen ab ist. Auf gleiche Weise suche man noch zu jedem der beiden übrigen Winkel einen Normalkreisbogen, der den Graden ꝛc. nach, das Supplement desselben ist. — Die dergestalt gefundenen drei Supplementarbogen haben, vermöge der obigen Bedingungen 1 und 2, alle die Eigenschaften, unter welchen sich nach §. 24, 2 stets ein sphärisches Dreieck aus ihnen construiren lassen muß; man construire also dieses Dreieck wirklich und verzeichne alsdann nach §. 17, 1 das zu demselben gehörige Polardreieck, so sind des letzteren Winkel nach der Reihe wiederum in Graden ꝛc. die Supplemente von den Seiten des ersteren, also die Supplemente von den Supplementen der gegebenen Winkel, d. h. sie sind einzeln den vorgegebenen Winkeln selber gleich, womit also das beabsichtigte Dreieck realisirt ist, in welchem zugleich die Seiten, gleich den Winkeln, einzeln kleiner als 180° sein müssen (§. 14, 8).

3. Sind in der obigen Construction zwei Winkel gleich, so entsteht (§. 21, 2) ein gleichschenkliges, folglich auch, wenn alle drei Winkel gleich sind, ein gleichseitiges sphärisches Dreieck, und zwar muß in letzterem auch verm. §. 22, 11, jede der drei gleichen Seiten kleiner oder größer als ein Quadrant sein, je nachdem die drei Winkel einzeln spitz oder stumpf sind.

4. Ueberhaupt entsteht, wenn alle drei gegebene Winkel spitz sind, ein spitzwinkliges, wenn unter ihnen ein rechter Winkel sich befindet, ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, dessen Seiten auch in der Sphärik die in der Ebenengeometrie üblichen Namen erhalten, und ein stumpfer Winkel unter den gegebenen, giebt ein stumpfwinkliges sphärisches Dreieck. Uebrigens erhellt zugleich, daß in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke auch ein zweiter Winkel ein rechter, oder daß auch alle drei Winkel rechte sein, ja daß rechte Winkel und stumpfe zusammen darinn vorkommen können, oder daß es selbst sphärische Dreiecke geben könne, in welchen alle drei Winkel stumpf sind, (z. B. das Dreieck daß in Fig. 6) weil diese Fälle sämmtlich, wie das obige zeigt, den Bedingungen, unter welchen verm. S. 2 jedesmal mit drei Winkeln ein sphärisches Dreieck wirklich gegeben ist, im Allgemeinen auf keine Weise widersprechen.

Eigenschaften der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke insbesondere.

§. 29.

Fig. 18. 1. Wenn in einem rechtwinkligen sphär. Dreiecke arb außer dem ursprünglichen rechten Winkel r noch ein zweiter Winkel b=90° ist, so ist auch der dem letzteren gegenüberstehende Kathet ar und die Hypotenuse ab=90°.

Verm. §. 7, 7 und §. 9, 4.

2. Wenn in einem rechtw. sphär. Dreiecke arb außer dem rechten Winkel r noch ein Kathet ar=90° ist, so ist auch dieses Katheten Gegenwinkel, d. h. der ihm gegenüber liegende abr, desgl. die Hypotenuse ab=90°.

Verm. §. 9, 7, §. 7, 6 und §. 9, 4.

3. Wenn in einem rechtw. sphär. Dreiecke arb außer dem rechten Winkel r noch die Hypotenuse ab=90° ist, so muß von den beiden der letzteren anliegenden Winkeln, wenigstens immer einer b, und somit auch der ihm gegenüberliegende Kathet ar=90° sein.

Denn es sei der eine Kathet br größer oder kleiner als ein Quadrant, so kann man auf ihm oder seiner Verlängerung einen Bogen rd=90° nehmen und durch a und d den Normalkreisbogen ad supponiren: alsdann ist im rechtwinkligen Dreiecke ard der Kathet rd, folglich auch die Seite ad ein Quadrant (§. 2) und da nach der Voraussetzung auch ab ein Quadrant und übrigens verm. der Construction der Bogen bd immer kleiner als 180° ist, so muß folglich a der Pol des Bogens rbd sein (§. 9, 6), daß also auch ar ein Quadrant (§. 9, 4) und abr ein rechter Winkel sein muß (§. 2).

4. Vermöge der obigen Sätze 1—3 ist es klar, daß wenn in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke arb außer dem rechten Winkel r noch irgend ein Element, welches es auch sein möge, =90° ist, sodann überhaupt im ganzen Dreiecke vier Elemente, nehmlich zwei Seiten und zwei Winkel nothwendig einzeln =90° sein müssen und zwar die Hypotenuse ab, ein Kathet ar, dessen Gegenwinkel b und der ursprünglich rechte Winkel r.

Es

Es müssen sodann jedesmal aber auch die beiden übrigen Elemente, nehmlich der Kathet br mit seinem Gegenwinkel bar an Graden einander gleich sein, weil wegen der rechten Winkel in r und b der Punct a der Pol von br (§. 7, 7), also br das Maaß des Gegenwinkels bar ist.

Zugleich aber müssen die nehmlichen Elemente auch der absoluten Größe nach von den übrigen gänzlich unabhängig sein, so daß sie jede Größe unter 180° haben, mithin beide selbst auch einzeln $=90°$ sein können, ohne daß darum irgend eins der übrigen Elemente kleiner oder größer als 90° werden darf, da jede zwei von dem Pol a nach br oder dessen Verlängerung gezogene Normalkreisbogen, zwei auf letzterer senkrechte Quadranten sind (§. 7, 6 und §. 9, 4).

5. Wenn in einem rechtwinkl. sphär. Dreieck ein Kathet kleiner als 90° ist, so ist auch sein Gegenwinkel kleiner als 90°, und wenn der Kathet größer als 90° ist, so ist gleichfalls sein Gegenwinkel größer als 90°.

Denn es sei in dem bei r rechtwinkl. sphär. Dreieck erb der Kathet er kleiner als 90°, so verlängere man ihn, bis $ra=90°$ ist und der aus b nach dem Endpunct a der Verlängerung gezogene Bogen ab bildet alsdann mit br den Winkel $abr>rbe$ und da nun $abr=90°$ (S. 2) so ist $rbe<90°$. — Es sei dagegen im Dreiecke frb der Kathet fr größer als 90°, so verbinde man, nachdem auf fr der Quadrant ra abgeschnitten ist, wiederum die Puncte b und a durch den Normalkreisbogen ba, welcher mit br den Winkel $abr<rbf$ bildet, daß mithin, wegen $abr=90°$ (S. 2), $rbf>90°$ ist.

6. Wenn umgekehrt in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke ein Winkel kleiner als 90° ist, so ist auch der gegenüberstehende Kathet kleiner, und wenn der Winkel größer als 90° ist, so ist auch der ihm gegenüberstehende Kathet größer als 90°.

Denn wenn man in dem bei r rechtwinkl. Dreiecke erb den Winkel b kleiner als 90° setzt, so kann der gegenüberliegende Kathet er nicht $=90°$ sein, weil sonst auch $b=90°$ sein müßte (S. 2); es kann eben so wenig $er>90°$ sein, weil dann gleichfalls $b>90°$ sein müßte (5); mithin kann er nicht anders denn kleiner als 90° sein. Auf gleiche Weise ergiebt sich aus den Sätzen 2 und 5, daß, wenn im Dreiecke frb der Winkel b größer als 90° ist, auch der ihm gegenüberstehende Kathet fr größer als ein Quadrant sein muß.

§. 30.

Es sei aQbq ein Normalkreis, s irgend ein von dessen Pol P verschiedener Sphärenpunct außer ihm und durch s sei auf aQbq, welcher der Grundkreis heißen Fig. 19.

mag, der Halbnormalkreis asPb senkrecht gezogen, so bestimmen sich dadurch die supplementarischen Perpendikelbogen $sa < 90°$, $sPb > 90°$ und mit ihnen bildet jeder dritte Normalkreisbogen zwischen s und irgend einem Punct e des Grundkreises zwei rechtwinklige sphärische Dreiecke sae, sbe. Stellt man sich einen Normalkreis oder hinlänglich großen Normalkreisbogen vor, der um den Punct s durch alle mögliche Lagen sa, se, sd, sn u. s. m. sich rings herum bewegt, so bildet derselbe nach der Reihe alle auf die oben angegebene Weise mögliche rechtwinklige Dreiecke. In allen diesen sind nebst den rechten Winkeln in a und b nur die Supplementar-Perpendikalbogen oder Katheten sa, sPb constant, die übrigen Elemente aber, nehmlich die Supplementarwinkel in s, die Supplementarabscissen oder Katheten auf dem Grundkreise, der jedesmalige Hypotenusenbogen se, sd u. s. f. und die von ihm mit dem Grundkreise gebildeten Supplementarwinkel, sind nach der verschiedenen Lage der Hypotenuse verschieden und es ist von besonderer Wichtigkeit, die Hauptgesetze, nach welchen sie in ihrem Ab- und Zunehmen und ihrem gegenseitigen Verhalten sich richten, kennen zu lernen.

1. Jeder Hypotenusenbogen se ist größer als der kleinere Perpendikelbogen sa und kleiner als der größere Perpendikelbogen sPb.

Denn da der Winkel in e im rechtwinkl. Dreiecke sae spitz, im Dreiecke sbe stumpf ist (§. 29, 5), so ist verm. §. 21, 3, $se > sa$, $se < sPb$.

2. Von jeden zwei auf einer und derselben Seite des Perpendikels asPb liegenden Hypotenusenbogen se, sd ist derjenige, sd, der größere, welcher um die größere Abscisse, $ad > ae$ vom kleineren Perpendikelbogen sa, oder, was damit eins ist, um die kleinere Abscisse $bQd < bQe$, vom größeren Perpendikelbogen sPb entfernt ist.

Denn im Dreiecke sed ist aus dem in S. 1 angegeb. Grunde, der Winkel e stumpf, d spitz, also $sd > se$ (§. 21, 5).

3. Umgekehrt muß von zwei auf einer und derselben Seite des Perpendikels asPb liegenden Bogen sd, sn derjenige, sn, um die größere Abscisse von sa oder um die kleinere von sPb entfernt sein, welcher der größere von beiden ist.

Denn setzte man sn in irgend eine Lage zwischen sd und sa, so wäre, verm. S. 2, sd und nicht sn der größere von beiden Bogen, gegen die Voraussetzung.

4. Wenn die beiden Supplementarabscissen des Grundkreises gleich sind, $aQ = bQ = 90°$, so ist auch der Hypotenusenbogen sQ ein Quadrant, zugleich ist sodann jeder der beiden Supplementarwinkel in s ein rechter und von den Sup-

plementarwinkeln am Grundkreise in Q ist jeder dem ihm gegenüberliegenden Perpendikelbogen an Graden gleich

Vermöge §. 29, 4.

5. Umgekehrt muß, wenn der Hypotenusenbogen sQ ein Quadrant ist, auch jede der Abscissen aQ=bQ=90° sein und somit auch alles übrige, das so eben als eine nothwendige Folge hievon anerkannt ist, statt finden.

Folgt, da sa und sPb nach der allgemeinen Voraussetzung niemals =90° sein können, gleichfalls aus §. 29, 4.

6. Wenn also die dem kleineren Perpendikelbogen sa anliegende Abscisse ae ebenfalls kleiner als 90°, oder, was damit eins ist, wenn die dem größern Perpendikelbogen sPb anliegende Abscisse bQe gleichfalls größer als 90° ist, so muß der Hypotenusenbogen se kleiner als 90° sein.

Verm. S. 2 und 4.

7. Wenn dagegen die dem kleinern Perpendikelbogen sa anliegende Abscisse aQo größer, oder die dem größern Perpendikelbogen sPb anliegende Abscisse bo kleiner als 90° ist, so muß der Hypotenusenbogen so größer als 90° sein.

Gleichfalls verm. S. 2 und 4.

8. Umgekehrt muß, wenn der Hypotenusenbogen se kleiner als 90° ist, die zwischen ihm und dem kleinern Perpendikelbogen liegende Abscisse ae kleiner, oder, was damit eins ist, die zwischen dem Hypotenusenbogen und dem größeren Perpendikelbogen liegende Abscisse bQe größer als 90° sein.

Verm. S. 3 und 5.

9. Wenn dagegen der Hypotenusenbogen so größer als 90° ist, so muß die zwischen ihm und dem kleineren Perpendikelbogen liegende Abscisse aQo größer, die zwischen ihm und dem größeren Perpendikelbogen liegende Abscisse bo kleiner als 90° sein.

Gleichfalls verm. S. 3 und 5.

10. Wenn zwei Hypotenusenbogen sd, sh auf verschiedenen Seiten des Perpendikels asPb von demselben um gleiche Abscissen ad=ah entfernt sind, so sind beide gleich.

Verm. §. 19, 1.

11. Wenn umgekehrt zwei auf verschiedenen Seiten des Perpendikels asPb liegende Bogen sd, sh gleich sind, so müssen sie auch um gleiche Abscissen ad=ah vom Perpendikel entfernt sein.

Denn wären die Abscissen ungleich, etwa $ah > ad$, so könnte man auf ah ein Stück $ai = ad$ nehmen, hätte sodann $si = sd$ (10), also auch $si = sh$ gegen S. 2.

12. Es ist also auch von zwei auf verschiedenen Seiten des Perpendikels liegenden Bogen, sd, si derjenige, sd der größere, der um die größere Abscisse $ad > ai$ vom kleinern Perpendikelbogen sa, oder, was damit eins ist, um die kleinere Abscisse $bQd < bqi$ vom größeren Perpendikelbogen sPb entfernt ist.

Denn man kann auf ad stets $ae = ai$ nehmen, hat sodann $se = si$ (10), $se < sd$ (2), folglich auch $si < sd$.

13. Umgekehrt muß von zwei auf verschiedenen Seiten des Perpendikels befindlichen Bogen sd, si, derjenige, sd um die größere Abscisse $ad > ai$ vom kleinern Perpendikelbogen sa, oder um die kleinere Abscisse $bQd < bqi$ vom größern Perpendikelbogen sPb entfernt sein, welcher der größere ist.

Denn wäre ad nur eben so groß oder noch kleiner als ai, so müßte im ersten Fall sd auch nur eben so groß (10), im zweiten noch kleiner sein, als si (12); beides der Voraussetzung geradehin widersprechend.

14. Jede zwei auf einer und derselben Seite des Perpendikels asPb liegende Hypotenusenbogen sd, sf, die um gleiche Abscissen $dQ = fQ$ vom Quadranten sQ, oder, welches dasselbe, um gleiche Abscissen $ad = bf$ vom größern und kleinern Perpendikelbogen entfernt sind, sind einer des andern Supplement.

Denn man verlängere den Bogen sf nebst dem Quadranten sQ über s bis beide auf der andern Seite den Grundkreis in h und q schneiden, so sind die Bogen $fQ = hq$ (§. 16, 1), also auch $dQ = hq$, somit auch $ad = ah$ und $sd = sh$ (10), folglich wegen $sh + sf = 180°$ (§. 6, 5) auch $sd + sf = 180°$.

15. Umgekehrt müssen jede zwei auf einer und derselben Seite des Perpendikels befindliche Hypotenusenbogen sd, sf, wenn sie einander zu 180° ergänzen, zu beiden Seiten des Quadranten sQ um gleiche Abscissen $dQ = fQ$ von demselben, oder, welches dasselbe, um gleiche Abscissen $ad = bf$ vom kleinern und größern Perpendikelbogen entfernt sein.

Denn da auf derselben Seite des Perpendikels außer dem einen Quadranten sQ kein zweiter möglich ist (5), so muß von den beiden Supplementarbogen der eine kleiner, der andere größer als 90° sein und beide müssen daher zu verschiedenen Seiten von sQ liegen (3). Wären nun die Abscissen dQ, fQ ungleich, etwa $dQ < fQ$, so könnte die kleinere um ein solches Stück, de verlängert wer-

den, daß eQ = fQ würde; alsdann aber hätte man se + bf = 180° (14) und ae = sd, gegen S. 2. Es kann also nur dQ = fQ und ad = bf sein.

16. Wenn ferner zwei Hypotenusenbogen se, sf auf einer und derselben Seite des Perpendikels, aber zu verschiedenen Seiten des Quadranten sQ liegen, daß mithin der eine, se kleiner, der andere sf größer als 90° ist, und es ist der kleinere se von dem Quadranten um eine größere Abscisse, eQ > fQ, oder, was damit eins ist, vom Perpendikel um eine kleinere Abscisse ae < bf entfernt, als der größere Bogen sf so sind beide Bogen zusammen genommen kleiner als 180°. — Wenn dagegen von zwei solchen Bogen, sd, so der kleinere sd vom Quadranten um eine kleinere Abscisse dQ < oQ, oder folglich vom Perpendikel um eine größere Abscisse ad < bo entfernt ist, als der andere so, so sind beide Bogen zusammen genommen größer als 180°.

Denn wenn eQ > fQ und man nimmt dQ = fQ, so ist sd + sf = 180° (14) und se < sd (2), also se + sf < 180°. Eben so, wenn oQ > dQ, hat man, nachdem fQ = dQ genommen, sd + sf = 180°, so > sf, mithin sd + so > 180°.

17. Umgekehrt muß von zwei auf einer Seite des Perpendikels aber zu verschiedenen Seiten des Quadranten sQ liegenden Hypotenusenbogen, wenn dieselben, wie se, sf zusammen kleiner als 180° sind, der kleinere se vom Quadranten um eine größere Abscisse, eQ > fQ oder folglich vom Perpendikel um eine kleinere Abscisse, ae < bf entfernt sein, als der größere sf. — Wenn hingegen zwei solche Hypotenusenbogen, wie sd, so zusammen größer als 180° sind, so muß der kleinere sd vom Quadranten um eine kleinere Abscisse, dQ < oQ oder vom Perpendikel um eine größere Abscisse, ad > bo entfernt sein, als der andere so.

Denn wenn im ersten Fall eQ = fQ wäre, so müßte se + sf = 180° sein (14); und wenn eQ < fQ wäre, so müßte se + sf > 180° sein (16); beides der Voraussetzung widerstreitend: es kann bei derselben also nur eQ > fQ sein. Eben so wäre unter der zweiten Voraussetzung dQ = oQ und dQ > oQ, verm. S. 14 und 16, derselben geradehin entgegen, und es kann nur dQ < oQ sein.

18. Aus dem bisherigen ist klar, daß der zwischen s und dem Grundkreise befindliche Hypotenusenbogen, bei der anfangs gedachten Bewegung um s, ununterbrochen zwischen einem Minimum und Maximum wachse und abnehme. Vom Minimum des durch s bestimmten kleineren Perpendikelbogens sa (1) anhebend, durchläuft er nehmlich wachsend (2) alle folgenden Größen unter 90°, bis er in der Mitte zwischen beiden Perpendikelbogen ein Quadrant wird (4) von da geht

er eben ſo ſtetig wachſend alle Größen über 90° durch und zwar ſo, daß in jeder beſtimmten Lage, wie z. B. sf immer das Supplement von der unter gleicher Entfernung, dQ=fQ auf der andern Seite des Quadranten ſtatt gefundenen Größe, sd unter 90° eintritt (14), bis er endlich in dem größern Perpendikelbogen sPb das Maximum ſeiner Größe erreicht (1), und wenn er von hier aus auf der andern Seite des Perpendikels ſeine Bewegung bis nach sa zurück fortſetzt, ſo geht er unter gleichen Umſtänden in entgegengeſetzter Ordnung alle Größen wiederum abnehmend durch (10), welche er anfangs von sa nach sPb zu wachſend durchlief.

19. Zwiſchen dem Puncte s und dem Grundkreiſe aQbq kann alſo dieſelbe Größe eines Hypotenuſenbogens, wie z. B. sf nicht öfter als nur einmal, in sg, nehmlich auf der entgegengeſetzten Seite des durch s gehenden Perpendikels in gleichem Abſtande bg=bf von demſelben ſich wiederholen und jeder dritte Bogen zwiſchen s und demſelben Grundkreiſe muß größer oder kleiner als sf=sg ſein, falls der Bogen nicht der kleinere oder größere Bogen des Perpendikels ſelbſt iſt, die beide nur einmal möglich ſind.

20. Jeder durch einen Bogen aus s mit dem Grundkreiſe gebildete Winkel iſt, wenn er wie sea, dem kleineren Perpendikelbogen sa gegenüber liegt, ſpitz; ſtumpf hingegen, ſo oft er, wie sob dem größern Perpendikelbogen sb gegenüber liegt.

Verm. §. 29, 5.

21. Umgekehrt muß jeder durch einen Bogen aus s mit dem Grundkreiſe gebildete Winkel, wenn er ſpitz iſt, dem kleineren, wenn er ſtumpf iſt, dem größeren Perpendikelbogen gegenüber liegen. Verm. §. 29, 6.

22. Von den beiden Supplementarwinkeln am Grundkreiſe, deren gemeinſchaftlicher Scheitel in Q oder q, vom größeren und kleineren Perpendikelbogen um die gleichen Abſciſſen aQ=bQ=aq=bq=90° entfernt liegt, iſt jeder dem ihm gegenüber liegenden Perpendikelbogen an Graden gleich, nehmlich sQa=sqa=sa und sQb=sqb=sPb. Verm. §. 4.

23. Von jeden zwei andern Supplementarwinkeln am Grundkreiſe, deren Scheitel e oder o nicht im Quadrantenendpunct Q oder q liegt, iſt der dem kleinern Perpendikelbogen sa gegenüber liegende, sea, soQ an Graden größer als sa oder als der Winkel sQa, und der dem größern Perpendikelbogen sPb gegenüber liegende, seQ, sob iſt an Graden kleiner als sPb oder der Winkel sQb.

Denn da $se < 90°$ (6), $sQ = 90°$ (4) also $se + sQ < 180°$, so ist $sea > sQa$, $sQb > seQ$ (§. 22, 4); und da $so > 90°$ (7), also $so + sQ > 180°$, so ist $soQ > sQa$, $sQb > sob$ (§. 22, 7).

24. So oft daher ein durch einen Bogen aus s mit dem Grundkreise gebildeter Winkel an Graden gleich dem einen oder andern der beiden Perpendikelbogen sa, sPb ist, so muß dieser Winkel mit seinem Scheitel im Quadrantenendpunct Q oder q dem ihm an Graden gleichen Perpendikelbogen gegenüber liegen.

Denn wenn der Scheitel des Winkels in a oder b läge, so wäre dieser ein rechter; in jedem andern Punct des Grundkreises außer Q und q liegt immer nur der Scheitel eines von jedem der beiden Perpendikelbogen an Graden verschiedenen Winkels (23); also kann der Scheitel des Winkels nur in Q oder q liegen und die Oeffnung des letzteren muß verm. S. 21 zugleich immer dem an Graden ihm gleichen Perpendikelbogen zugewandt sein.

25. Von zwei dem kleineren Perpendikelbogen sa opponirten, mit ihren Scheiteln zwischen dem letzteren und dem Quadranten sQ liegenden Winkeln sea, sda, desgleichen von zwei dem kleinern Perpendikelbogen opponirten, mit ihren Scheiteln zwischen dem Quadranten sQ und dem größern Perpendikelbogen sPb liegenden Winkeln sfQ, soQ am Grundkreise, ist derjenige, sea, soQ der größere, dessen Scheitel vom Quadranten um die größere Abscisse, $eQ > dQ$, $oQ > fQ$ entfernt ist.

Denn da $se + sd < 180°$ (6), so ist $sea > sda$ (§. 22, 4) und da $sf + so > 180°$ (7) so ist $soQ > sfQ$ (§. 22, 7).

26. Umgekehrt muß von zwei dem kleinern Perpendikelbogen sa opponirten, mit ihren Scheiteln zwischen ihm und dem Quadranten sQ liegenden Winkeln sda, sna, desgleichen von zwei dem kleinern Perpendikelbogen opponirten, mit ihren Scheiteln zwischen dem Quadranten und dem größern Perpendikelbogen sPb liegenden Winkeln smQ, sfQ am Grundkreise, derjenige, sda, sfQ mit seinem Scheitel um die größere Abscisse $dQ > nQ$, $fQ > mQ$ vom Quadranten entfernt sein, welcher der größere ist.

Denn das Gegentheil würde verm. S. 25 der Voraussetzung geradehin widersprechen.

27. Von zwei dem größern Perpendikelbogen sPb opponirten Winkeln seQ, sdQ am Grundkreise, deren Scheitel zwischen a und Q liegen; desgleichen von zwei demselben Perpendikelbogen opponirten mit ihren Scheiteln zwischen b und Q liegenden Winkeln sfb, sob am Grundkreise, ist derjenige, sdQ, sfb der größere,

deſſen Scheitel vom Quadranten um die kleinere Abſciſſe $dQ < eQ$, $fQ < dQ$ entfernt iſt.

Denn da $sea > sda$, $soQ > sfQ$ (25) ſo iſt klar, daß von den Supplementarwinkeln $sdQ > seQ$, $sfQ > soQ$ ſein muß.

28. Umgekehrt muß von zwei dem größeren Perpendikelbogen sPb opponirten, mit ihren Scheiteln zwiſchen a und Q liegenden Winkeln sdQ, snQ; desgleichen von zwei den größern Perpendikelbogen opponirten, mit ihren Scheiteln zwiſchen b und Q liegenden Winkeln smb, sfb am Grundkreiſe, derjenige, snQ, smb um die kleinere Abſciſſe $nQ < dQ$, $mQ < fQ$ vom Quadranten entfernt ſein, welcher der größere iſt.

Denn wenn $snQ > sdQ$, ſo iſt $sda > sna$, alſo $dQ > nQ$ (26), und eben ſo iſt, wenn $smb > sfb$ mithin $sfQ > smQ$, verm. S. 26 auch $fQ > mQ$.

29. Wenn zwei auf einer und derſelben Seite des Perpendikels $asPb$ liegende, einem und eben demſelben Perpendikelbogen opponirte Winkel sda, sfQ oder adQ, sfb um gleiche Abſciſſen, $dQ = fQ$ vom Quadranten sQ, oder, was damit eins iſt, um gleiche Abſciſſen, $ad = bf$ vom Perpendikel mit ihren Scheiteln entfernt ſind, ſo ſind beide Winkel einander gleich.

Denn da $sd + sf = 180°$ (14) ſo iſt auch $sda = sfQ$, $sdQ = sfb$ (§. 22, 1).

30. Und umgekehrt müſſen zwei auf einer Seite des Perpendikels $asPb$ liegende, einem und eben demſelben Perpendikelbogen gegenüberſtehende Winkel, wenn ſie einander gleich ſind, wie $sda = sfQ$ oder $sdQ = sfb$, auch von dem Quadranten sQ zu beiden Seiten deſſelben um gleiche Abſciſſen $dQ = fQ$ oder vom Perpendikel $asPb$ um gleiche Abſciſſen $ad = bf$ mit ihren Scheiteln entfernt liegen.

Denn mit $sda = sfQ$ oder $sfb = sdQ$ hat man auch $sdQ + sfQ = 180°$, daher $sd + sf = 180°$ (§. 22, 5) woraus das übrige unmittelbar nach S. 15 folgt.

31. Wenn zwei zu verſchiedenen Seiten des Perpendikels $asPb$ liegende, einem und demſelben Perpendikelbogen opponirte Winkel sda, sha oder sdQ, shq um gleiche Abſciſſen $ad = ah$ oder $bQd = bqh$ von demſelben Perpendikelbogen mit ihren Scheiteln entfernt ſind, ſo ſind beide gleich.

Denn mit $ad = ah$ iſt zugleich $sd = sh$ (10) daher $sda = sha$ (§. 21, 1) und $sdQ = shq$.

32. Wenn umgekehrt zwei zu verſchiedenen Seiten des Perpendikels $asPb$ liegende einen und eben demſelben Perpendikelbogen gegenüberſtehende Winkel, wie sda, sha oder sdQ, shq, gleich ſind ohne Polarwinkel zu ſein, ſo müſſen ſie auch

am gleiche Abſciſſen ad=ah oder bQd=bqh von demſelben Perpendikelbogen mit ihren Scheiteln entfernt ſein.

Denn da von den Schenkeln sd, sh, weil die Winkel nicht Polarwinkel ſind, keiner des andern Verlängerung ſein kann, ſo wird durch ſie allemal ein Dreieck shd beſtimmt, in welchem wegen der Gleichheit der Winkel auch die Seiten sd, sh gleich ſind (§. 21, 2) und hiernächſt iſt auch ad=ah (11) und bQd=bqh.

33. Aus den vorhergehenden Sätzen erhellt, in Beziehung auf die beiden Supplementarwinkel am Grundkreiſe, folgendes. Der dem kleinern Perpendikelbogen sa gegenüberliegende Winkel geht bei der im Anfange des Syhen gedachten Bewegung, vom rechten Winkel in a anhebend, eine Reihe ſpitzer Winkelgrößen (20) ſo lange abnehmend (25) durch, bis er in Q das Minimum, nehmlich mit sa an Graden gleich geworden iſt (22 und 23); er geht alsdann über Q hinaus dieſelbe Größenreihe wiederum wachſend hindurch (25), ſo daß immer in einer beſtimmten Entfernung des Scheitels vom Quadranten sQ dieſelbe Größe ſich wiederholt, welche in der nehmlichen Entfernung jenſeits von sQ ſtatt fand (29), bis aufs neue in b die Indifferenzgröße des rechten Winkels wieder hergeſtellt iſt. Von hier aus durchläuft er auf der andern Seite des Perpendikels jene Reihe ſpitzer Winkel in ſteter Abnahme wieder bis zum abermaligen Minimum in q und von da aus endlich die nehmliche Reihe wiederum anwachſend bis zum urſprünglichen rechten Winkel in a zurück (31). — Hiemit giebt ſich von ſelbſt das Geſetz des dem größern Perpendikelbogen sPb opponirten Winkels, der vom rechten in a bis zum Maximum des mit sPb an Graden gleichen (22 und 23) ſtumpfen Winkels in Q wächſt (27), von da dieſelben ſtumpfen Winkelgrößen in entgegengeſetzter Ordnung unter gleichen Entfernungen von Q (29) bis zum rechten in b abnehmend (27) durchläuft, ſodann auf der andern Seite des Perpendikels bis zu jenem Maximum in q wieder ſtetig anwächſt und darauf weiter bis zum urſprünglichen rechten in a allmählig wieder abnimmt (31).

34. Es iſt demnach, ſo lange s und der Grundkreis ihre gegenſeitige Lage nicht ändern, der dem kleinern Perpendikelbogen sa an Graden gleiche (ſpitze) Winkel der kleinſte, und der dem größern Perpendikelbogen sPb an Graden gleiche (ſtumpfe) Winkel der größeſte unter allen Winkeln, welche durch irgend einen zwiſchen s und dem Grundkreiſe befindlichen Hypotenuſenbogen mit jenem nur gebildet werden können; und zwar können dieſes Minimum und Maximum, jedes nur zweimal, in den Quadrantenendpuncten Q oder q ſtatt haben. Jeder andere Winkel, deſſen Größe zwiſchen jenem Minimum und Maximum enthalten iſt,

muß allemal durch bestimmte Bogen zwischen s und dem Grundkreise mit letzterem erzeugt werden können, aber in jedem der vier Quadranten aQ, bQ, aq, bq nur einmal oder über dem ganzen Grundkreise nicht öfter als viermal vorkommen, so daß die Scheitel diesseits und jenseits von Q und q um gleiche Abscissen entfernt sind.

35. Endlich ist noch in Betreff der Supplementarwinkel in s ohne weiteres klar, daß der dem kleineren Perpendikelbogen anliegende Winkel bei jener mehrgedachten Bewegung ununterbrochen von 0° bis 180° anwachse, während sein dem größeren Perpendikelbogen anliegender Nebenwinkel von 180° bis 0° eben so stetig abnimmt.

Ein Gleiches gilt offenbar auch von den Supplementarabscissen des Grundkreises. — Insbesondere ist jeder der beiden Supplementarwinkel in s ein rechter, asQ = bsQ = 90°, so oft die beiden Abscissen aQ = bQ = 90° sind, und umgekehrt sind die Abscissen aQ = bQ Quadranten, wenn die Winkel asQ = bsQ rechte Winkel sind. Verm. §. 29, 1 und 2.

36. Es müssen aber jedesmal auch, wenn zwei auf einer Seite des Perpendikels demselben anliegende Abscissen ae, bo gleich sind, die ihnen gegenüber liegenden Winkel in s, nehmlich ase, bso, einander gleich sein; und umgekehrt müssen, wenn die in s auf einer Seite des Perpendikels demselben anliegende Winkel ase, bso gleich sind, auch die gegenüber liegenden Abscissen ae, bo einander gleich sein.

Denn wenn se bis in u verlängert wird, so hat man unter der ersten Voraussetzung bu = ae = bo, daher die Dreiecke sbo, sbu nach §. 19, 1 identisch und die Winkel ase = bsu = bso; unter der zweiten Voraussetzung dagegen sind die Winkel bso = ase = bsu, folglich die Dreiecke sbo, sbu nach §. 20, 1 identisch und bu = ae = bo.

37. Es müssen daher auch, wenn zwei zu beiden Seiten des Quadranten sQ demselben anliegende Abscissen dQ, fQ gleich sind, die in s opponirten, dem Quadranten anliegenden Winkel dsQ, fsQ gleich sein; und wenn umgekehrt zwei in s dem Quadranten sQ anliegende Winkel dsQ, fsQ gleich sind, so sind auch die gegenüber liegenden Abscissen dQ, fQ einander gleich.

Denn mit dQ = fQ ist auch ad = bf, asd = bsf (36), und dsQ = fsQ; eben so ist mit dsQ = fsQ auch asd = bsf, ad = bf (36) und dQ = fQ.

38. Sind also zwei auf einer Seite des Perpendikels demselben anliegende Abscissen, ae, bf ungleich, so wird offenbar auch von den ihnen in s opponirten Winkeln, der größere bsf > ase der größern Abscisse, bf > ae, und umgekehrt

wird bei ungleichen, dem Perpendikel anliegenden Winkeln, die größere Abscisse bf > ae dem größeren Winkel bsf > ase gegenüber liegen (36).

39. Eben so wird, wenn zwei dem Quadranten sQ zu beiden Seiten anliegende Abscissen ungleich sind, von den opponirten Winkeln in s der größere esQ > fsQ der größeren Abscisse eQ > fQ, und umgekehrt wird, wenn die in s am Quadranten liegenden Winkel ungleich sind, die größere Abscisse eQ > fQ dem größeren Winkel esQ > fsQ gegenüber liegen (37).

40. Wenn ferner zwei zu beiden Seiten des Perpendikels einem und eben demselben Perpendikelbogen sa, anliegende Abscissen ae, ai gleich sind, so sind auch, nach §. 19, 1 die ihnen in s opponirten Winkel, asi, ase einander gleich; und umgekehrt müssen bei zwei gleichen, einem Perpendikelbogen zu beiden Seiten in s anliegenden Winkeln, asi = ase auch, nach §. 20, 1 die gegenüberliegenden Abscissen ai, ae einander gleich sein.

41. Daher müssen endlich auch bei zwei zu verschiedenen Seiten des Perpendikels einem Bogen sa, demselben anliegenden ungleichen Abscissen ae, ah, die ihnen in s opponirten Winkel ebenfalls ungleich sein, so daß der größeren Abscisse ah > ae auch der größere Winkel ash > ase entgegen steht; und umgekehrt wird, bei zwei ungleichen einem Perpendikelbogen zu beiden Seiten in s anliegenden Winkeln, die größere Abscisse ah > ae auch dem größeren Winkel ash > ase gegenüber liegen (40).

§. 31.

1. Wenn in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke die Hypotenuse und ein Kathet zusammen kleiner als 180° sind, so ist von beiden die Hypotenuse die größere Seite; wenn dagegen die Hypotenuse und ein Kathet zusammen größer als 180° sind, so ist der Kathet größer als die Hypotenuse.

Denn wenn in dem bei r rechtwinkl. sphär. Dreiecke erb die Hypotenuse eb mit dem Katheten er zusammen kleiner als 180° ist, so sind auch die Winkel erb + ebr < 180° (§. 22, 5), folglich ist der Winkel ebr kleiner als der rechte r und daher auch eb > er (§. 21, 3). Wenn dagegen im Dreiecke frb die Hypotenuse fb mit dem Katheten fr zusammen größer als 180° ist, so sind auch die Winkel frb + fbr > 180° (§. 22, 8), also fbr > r, und fr > fb (§. 21, 3). Fig. 13.

2. Wenn in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke ein Kathet kleiner oder größer als 90° und mit seinem Gegenwinkel an Graden gleich ist, so sind alle übrigen

Winkel und Seiten desſelben Dreiecks einzeln = 90°, d. h. der in §. 29, 4 erwieſene Satz iſt auch umgekehrt wahr.

Fig. 20. Denn es mag in dem bei a rechtwinkl. Dreiecke saQ der Kathet sa kleiner oder größer als 90° ſein, ſo iſt in beiden Fällen ſein Endpunct s vom Pol des andern Katheten aQ verſchieden (§. 9, 8), und es muß folglich, wenn der Gegenwinkel Q des Katheten sa mit demſelben an Graden gleich iſt, aQ ein Quadrant ſein (§. 30, 24); dann aber muß auch der Winkel s und die Hypotenuſe sQ = 90° ſein (§. 29, 2).

3. Wenn dagegen in einem rechtwinkl. ſphär. Dreiecke zwei Elemente einzeln genommen nicht = 90° und dabei entweder gar keine Oppoſita oder wenigſtens nicht an Graden gleiche Oppoſita ſind, ſo iſt auch außer dem rechten Winkel kein einziges der drei noch übrigen Elemente = 90°.

Denn ſetzt man irgend eins der letzteren = 90°, ſo müßten überhaupt vier Elemente des Dreiecks einzeln genommen = 90° ſein (§. 29, 4), und jene beiden Elemente, von denen nach dem erſten Theil der Vorausſetzung keines = 90° ſein ſoll, müßten alſo gerade die, außer jenen vier, noch übrigen Elemente des Dreiecks ſein. Dieſe beiden Elemente müſſen aber zugleich verm. §. 29, 4 zwei an Graden gleiche Oppoſita ſein, welches dem zweiten Theil der Vorausſetzung ſchlechthin widerſpricht. Es iſt mithin unmöglich, daß unter der vollſtändigen Vorausſetzung außer dem rechten Winkel noch irgend eins der übrigen Elemente des Drei- = 90° iſt.

4. In der Folge wird, ſo oft von einem rechtwinkl. ſphär. Dreiecke ſchlechthin die Rede iſt, immer ein ſolches verſtanden werden, in welchem, außer dem urſprünglich rechten Winkel kein einziges Element weiter = 90° iſt; das Gegentheil wird, wenn es ſtatt findet, jedesmal ausdrücklich angezeigt werden. — Auch iſt zugleich zu merken, daß im folgenden unter zwei *gleichartigen Elementen* eines ſphär. Dreiecks, es mögen dieſelben zwei Seiten, oder zwei Winkel oder eine Seite und ein Winkel ſein, immer ſolche verſtanden werden, die beide zugleich entweder kleiner, oder größer als 90° ſind; wenn aber das eine kleiner, das andere größer als 90° iſt, ſo heißen ſie *ungleichartige Elemente*. Gleichartige ſowohl als ungleichartige Elemente ſind alſo zugleich jedesmal ſolche, von denen keines = 90° ſein kann.

§. 32.

1. In einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke ist die Hypotenuse kleiner als 90°, wenn beide Katheten gleichartig sind; so oft diese hingegen ungleichartig sind, ist die Hypotenuse größer als 90°. — Wenn umgekehrt die Hypotenuse kleiner als 90° ist, so sind beide Katheten gleichartig; wenn dagegen die Hypotenuse größer als 90° ist, so sind die beiden Katheten ungleichartig.

Denn wenn ein Kathet $sa < 90°$, so ist die Hypotenuse $sd < 90°$, so lange ebenfalls der andere Kathet $ad < 90°$ ist; es ist aber die Hypotenuse $sf > 90°$, sobald der andere Kathet $af > 90°$ ist; und wenn ein Kathet $sb > 90°$ ist, so ist die Hypotenuse $sd < 90°$, so lange ebenfalls der zweite Kathet $bd > 90°$ ist; es ist aber die Hypotenuse $sf > 90°$, sobald der andere Kathet $bf < 90°$ ist; alles vermöge §. 30, 6 und 7. — Umgekehrt so lange die Hypotenuse $sd < 90°$ ist, so ist im rechtwinkl. Dreiecke sad, worinn der Kathet $sa < 90°$, auch der andere Kathet $ad < 90°$ und im rechtw. Dreiecke sbd, worinn der Kathet $sb > 90°$ ist, ist auch der andere Kathet $bd > 90°$; sobald dagegen die Hypotenuse $sf > 90°$ ist, so ist im rechtw. Dreiecke saf, neben dem einen Katheten $sa < 90°$, der andere $af > 90°$, und im rechtwinkl. Dreiecke sfb ist, neben dem einen Katheten $sb > 90°$, der andere $bf < 90°$; alles vermöge §. 30, 8 und 9. Fig. 19.

2. Folglich ist auch in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke die Hypotenuse kleiner als 90°, wenn beide ihr anliegende Winkel gleichartig sind; sie ist größer als 90°, wenn die ihr anliegenden Winkel ungleichartig sind. — Und umgekehrt, wenn die Hypotenuse kleiner als 90° ist, sind beide ihr anliegende Winkel gleichartig; ungleichartig aber sind sie, wenn die Hypotenuse größer als 90° ist.

Verm. §. 29, 5 und 6.

3. Desgleichen ist im rechtwinkl. sphär. Dreiecke die Hypotenuse kleiner als 90°, wenn ein Kathet mit dem von ihm und der Hypotenuse eingeschlossenen Winkel gleichartig ist; die Hypotenuse ist größer als 90°, so oft ein Kathet mit dem von ihm und der Hypotenuse eingeschlossenen Winkel ungleichartig ist. — Umgekehrt ist jeder Kathet mit dem von ihm und der Hypotenuse eingeschlossenen Winkel gleichartig, wenn die Hypotenuse kleiner als 90°, ungleichartig, wenn jene größer als 90° ist.

Dieser Satz fließt eben so leicht wie der vorhergehende aus §. 29, 5 und 6 und dem 1sten Satze dieses Sphen.

4. Wenn ferner die Hypotenuse und ein Kathet gleichartig sind, so ist der andere Kathet, und also auch dessen Gegenwinkel, kleiner als 90°; wenn dagegen die Hypotenuse und ein Kathet ungleichartig sind, so ist der andere Kathet und somit auch sein Gegenwinkel größer als 90°.

Denn es sei die Hypotenuse größer als 90° und ein Kathet, ihr gleichartig, ebenfalls größer als 90°, so muß der andere Kathet kleiner als 90° sein, weil wenn er größer als 90° wäre, verm. S. 1, die Hypotenuse, gegen die Voraussetzung, kleiner als 90° sein müßte. — Auf diese Weise vollenden noch drei ganz ähnliche Schlüsse den Beweis des Satzes.

5. Wenn umgekehrt ein Kathet und also auch sein Gegenwinkel kleiner als 90° ist, so sind die Hypotenuse und der andere Kathet gleichartig; wenn dagegen ein Kathet und mithin auch dessen Gegenwinkel größer als 90° ist, so sind die Hypotenuse und der andere Kathet ungleichartig.

Denn wären im ersten Fall die Hypotenuse und der andere Kathet ungleichartig, so müßte, verm. S. 4, der erstere Kathet, der Voraussetzung geradehin entgegen, größer als 90° sein. Eben so erhellt auch die zweite Hälfte des Satzes.

6. Wenn die Hypotenuse und ein ihr anliegender Winkel gleichartig sind, so ist der andere ihr anliegende Winkel und also auch der diesem opponirte Kathet kleiner als 90°; wenn dagegen die Hypotenuse und ein ihr anliegender Winkel ungleichartig sind, so ist der andere ihr anliegende Winkel und somit auch der ihm opponirte Kathet größer als 90°.

Verm. S. 4 und §. 29, 6.

7. Umgekehrt wenn ein Winkel an der Hypotenuse und also auch der ihm opponirte Kathet kleiner als 90° ist, so sind die Hypotenuse und der zweite ihr anliegende Winkel gleichartig; wenn dagegen ein Winkel an der Hypotenuse und also auch der opponirte Kathet größer als 90° ist, so sind die Hypotenuse und der andere ihr anliegende Winkel ungleichartig.

Verm. S. 5 und §. 29, 6.

§. 33.

1. Wenn zwei Seiten eines rechtwinkl. sphär. Dreiecks einzeln kleiner als 90° sind, so muß auch die dritte Seite und jeder der beiden Winkel an der Hypotenuse kleiner als 90° sein.

Denn wenn jeder Kathet kleiner als 90° ist, so ist nach §. 32, 1 die Hypotenuse ebenfalls kleiner als 90°, und wenn ein Kathet und die Hypotenuse einzeln

kleiner als 90° sind, so ist nach §. 32, 4 der andere Kathet gleichfalls kleiner als 90°; in jedem Fall sind zugleich nach §. 29, 5 beide Winkel an der Hypotenuse einzeln kleiner als 90°.

2. Alle drei Seiten eines rechtwinkl. sphär. Dreiecks können aber niemals zugleich einzeln größer als 90° sein.

Denn wenn jeder Kathet größer als 90° ist, so ist verm. §. 32, 1 die Hypotenuse kleiner als 90° und wenn ein Kathet und die Hypotenuse einzeln größer als 90° sind, so muß nach §. 32, 4 der andere Kathet kleiner als 90° sein.

3. Wenn überhaupt in einem rechtwinkl. sphär. Dreieck nicht alle Elemente, außer dem rechten Winkel, durchgehends einzeln kleiner als 90° sind, so muß immer eine Seite des Dreiecks kleiner als 90°, die beiden andern Seiten dagegen müssen jede größer als 90° sein.

Denn wenn die Hypotenuse größer als 90° ist, so muß von den beiden Katheten der eine ebenfalls größer, der andere hingegen kleiner als 90° sein (§. 32, 1). Wenn ferner ein Kathet größer als 90° ist, so muß entweder der andere Kathet ebenfalls größer, die Hypotenuse aber kleiner als 90° sein, oder es muß die Hypotenuse größer, der andere Kathet sodann aber kleiner als 90° sein (§. 32, 5). Wenn endlich ein Winkel an der Hypotenuse größer als 90° ist, so ist auch der ihm gegenüberstehende Kathet größer als 90° und somit auch alles wie vorhin.

4. Es findet also, wenn nicht alle Elemente außer dem rechten Winkel eines rechtwinkl. sphär. Dreiecks durchgehends einzeln kleiner als 90° sind, von den beiden folgenden Fällen nothwendig immer nur der eine oder der andere statt: entweder

1) es ist ein Kathet und folglich auch sein Gegenwinkel kleiner als 90°, die Hypotenuse und der andere Kathet, so wie dessen Gegenwinkel sind einzeln größer als 90°; oder

2) die Hypotenuse ist kleiner als 90°, beide Katheten aber und folglich auch deren Gegenwinkel sind einzeln größer als 90°.

5. So oft aber in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke nicht alle Elemente außer dem rechten Winkel durchgehends einzeln kleiner als 90° sind, daß mithin der eine oder der andere von den beiden oben in S. 4. angegebenen Fällen statt findet, so giebt es unter den drei gleichfalls rechtwinkligen Seitendreiecken (§. 16, 4) jenes Dreiecks allemal eins, dessen Elemente respective mit denjenigen des Hauptdreiecks, welche kleiner als 90° sind, gleich, von denjenigen aber, die größer als

90°, die Supplemente sind, so daß folglich alle Elemente dieses Seitendreiecks, außer dem rechten Winkel, kleiner als 90° sind.

Fig. 19. Denn es werde zunächst der erste Fall gesetzt, nehmlich in dem bei a rechtwinkl. sphär. Dreiecke saf sei der Kathet sa, so wie sein Gegenwinkel sfa, kleiner als 90°, die Hypotenuse sf und der andere Kathet af nebst dessen Gegenwinkel asf einzeln größer als 90°: so ist das dem Katheten sa anliegende, durch die Verlängerung der beiden andern Seiten entstandene Seitendreieck sah von der erwähnten Eigenschaft, indem außer dem gemeinschaftlichen Katheten $sa < 90°$ der andere Kathet ah, als das Supplement von af, ebenfalls kleiner als 90° ist, daß mithin auch die Gegenwinkel sha, hsa, von denen überdies ersterer dem spitzen sfa als Polarwinkel gleich, letzterer das spitze Supplement des stumpfen asf ist, kleiner als 90° sind. — Es finde der zweite allein noch mögliche Fall statt, nehmlich in dem bei b rechtwinkl. sphär. Dreiecke sbd seien die Hypotenuse sd kleiner als 90°, die beiden Katheten sb, bd aber nebst deren Gegenwinkeln bds, bsd einzeln größer als 90°: so hat das der Hypotenuse sd anliegende, durch die Verlängerung beider Katheten gebildete Seitendreieck sad die angegebenen Eigenschaften. Denn indem sein rechter Winkel, als Polarwinkel von b, in s liegt, hat es die Hypotenuse $sd < 90°$ mit dem Hauptdreiecke gemein, die Katheten sa, da sind als Supplemente der Katheten des Hauptdreiecks einzeln kleiner als 90°, und schon darum, zugleich aber ebenfalls als Supplemente von denjenigen des Hauptdreiecks sind nicht minder die Winkel dsa, sda an der Hypotenuse einzeln kleiner als 90°.

Eigen-

Eigenschaften der sphärischen Quadrantendreiecke insbesondere.

§. 34.

1. Ein sphärisches Dreieck, in welchem eine Seite ein Quadrant ist, heißt in der Folge ein Quadrantendreieck. Es ist klar, daß das Polardreieck abd, Fig. 9. eines rechtw. sphär. Dreiecks nkl allemal ein solches Quadrantendreieck, so wie umgekehrt das Polardreieck nkl eines Quadrantendreiecks abd allemal ein rechtwinkliges sein müsse, indem die Supplementarseite ab des rechten Winkels l nichts anders als ein Quadrant oder der Supplementarwinkel l des Quadranten ab kein anderer als ein rechter sein kann.

2. Es kann also überhaupt jedes Quadrantendreieck abd als das Polardreieck eines bestimmten rechtwinkl. sphärischen Dreiecks nkl betrachtet werden, so daß nehmlich die in jenem dem Quadranten anliegenden Winkel bad, abd respective die Supplemente der Katheten kl, nl, die in jenem den Quadranten einschließenden Seiten ad, bd die Supplemente der an der Hypotenuse liegenden Winkel nkl, knl, endlich der in jenem dem Quadranten opponirte Winkel adb das Supplement der Hypotenuse kn des rechtwinkligen Dreiecks sein müssen.

3. Es ist demnächst leicht zu übersehen, daß die im vorhergehenden Abschnitte entwickelten Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks unter den gehörigen Modificationen als eben so viel nothwendige Eigenschaften des Quadrantendreiecks durchzuführen sein müssen, wie die vornehmsten derselben auch in den folgenden Sätzen dieses Syhen in gedrängter Zusammenstellung der Reihe nach angegeben werden. Es wäre mithin überflüssig, sie einzeln mit Beweisen zu versehen, da die Evidenz aus dem jedesmal nachgewiesenen Hauptsatz des vorigen Abschnitts ohne weiteres einleuchtet, sobald nur die folgenden aus der Natur des Polardreiecks (§. 17, 4) unmittelbar hervorgehenden Principien ein für allemal dabei zum Grunde gelegt werden.

a. Jedes Element des Quadrantendreiecks außer dem ursprünglichen Quadranten ist unter denselben Umständen $= 90°$, unter welchen das Supplementarelement des (rechtwinkligen) Polardreiecks $= 90°$ ist.

b. Jedes Element des Quadrantendreiecks muß eben so unter den nehmlichen Umständen größer als $90°$ sein, unter welchen das Supplementarelement des Polardreiecks kleiner als $90°$ ist; desgleichen muß jedes Element des Quadrantendreiecks unter eben den Umständen kleiner als $90°$ sein, unter welchen das Supplementarelement des Polardreiecks größer als $90°$ ist.

c. Es müssen daher endlich auch jede zwei Elemente des Quadrantendreiecks unter eben den Umständen gleichartig sein, unter welchen es die Supplementarelemente des Polardreiecks sind, und eben so müssen jene unter den nehmlichen Umständen ungleichartig sein, unter welchen es diese sind.

Hiernächst ergeben sich die folgenden wesentlichen Eigenschaften des Quadrantendreiecks.

4. Wenn zuvörderst in einem Quadrantendreiecke noch ein Winkel $= 90°$ ist, so tritt das Ganze in die Kategorie eines solchen rechtwinkl. sphär. Dreiecks, in welchem außer dem rechten Winkel noch eine Seite $= 90°$ ist (§. 29, 2 u. 3), und wird somit hier gänzlich außer Betracht gesetzt.

Wenn aber im Quadrantendreieck neben dem ursprünglichen Quadranten noch eine zweite Seite $= 90°$ ist, so ist auch der dieser Seite und der dem Quadranten opponirte Winkel $= 90°$ und die beiden übrigen Opposita sind an Graden gleich, von den übrigen Elementen aber ganz unabhängig, so daß sie jede Größe unter $180°$ haben können (§. 29, 4).

Wenn umgekehrt in einem Quadrantendreiecke ein dem Quadranten anliegender Winkel größer oder kleiner als $90°$ und der opponirten Seite an Graden gleich ist, so sind alle übrigen Seiten und Winkel des Dreiecks einzeln $= 90°$ (§. 31, 2).

Wenn dagegen in einem Quadrantendreiecke ein Winkel und eine Seite einzeln nicht $= 90°$ und dabei gar keine oder wenigstens nicht an Graden gleiche Oppositа sind, so ist auch, den Quadranten ausgenommen, kein einziges der andern Elemente $= 90°$ (§. 31, 3); und von solchen Quadrantendreiecken, in denen der Quadrant das einzige Element $= 90°$ ist, ist in den folgenden Sätzen allein die Rede.

5. In einem Quadrantendreiecke ist jeder dem Quadranten anliegende Winkel mit seiner Gegenseite gleichartig, und umgekehrt (§. 29, 5 u. 6).

6. Wenn in einem Quadrantendreiecke die beiden den Quadranten einſchließenden Seiten, oder die beiden ihm anliegenden Winkel, oder eine von jenen Seiten und der durch ſie und den Quadranten eingeſchloſſene Winkel gleichartig ſind, ſo iſt der Gegenwinkel des Quadranten größer als 90°; derſelbe iſt kleiner als 90°, wenn die Stücke ſo wie ſie eben angegeben ſind, ungleichartig ſind.

Wenn umgekehrt der Gegenwinkel des Quadranten größer als 90° iſt, ſo ſind jene Stücke, wie ſie paarweiſe genannt ſind, gleichartig; ungleichartig ſind ſie dagegen, wenn jener Winkel kleiner als 90° iſt.

Vermöge des 1ſten, 2ten und 3ten Satzes in §. 32.

7. Wenn in einem Quadrantendreiecke der Gegenwinkel des Quadranten mit einer der übrigen Seiten oder mit einem der übrigen Winkel gleichartig oder ungleichartig iſt, ſo iſt die dritte Seite oder der dritte Winkel im erſten Fall größer, im zweiten Fall kleiner als 90°.

Wenn umgekehrt eine der den Quadranten einſchließenden Seiten oder einer der ihm anliegenden Winkel größer oder kleiner als 90° iſt, ſo iſt der Gegenwinkel des Quadranten mit der andern Seite oder dem andern Winkel im erſten Fall gleichartig, im zweiten ungleichartig.

Vermöge des 4ten, 5ten, 6ten und 7ten Satzes in §. 32.

Fortgesetzte Betrachtung der allgemeinen Eigenschaften sphärischer Dreiecke.

§. 35.

1. Wenn eine Winkelspitze eines sphärischen Dreiecks nicht der Pol der gegenüberliegenden Seite ist, daß mithin aus jener auf diese oder deren Verlängerung nur ein einziges Perpendikel gezogen werden kann (§. 25, 6), so ist an und für sich klar, daß von den beiden durch jene Spitze geschiedenen Supplementerbogen dieses Perpendikels irgend einer mit einer Seite des Dreiecks nur dann zusammenfallen kann, wenn dieselbe mit der Grundseite einen rechten Winkel bildet; wenn aber keine der beiden Seiten auf letzterer senkrecht steht, so kann entweder nur ein Perpendikelbogen innerhalb, oder beide müssen ganz außerhalb des Dreiecks fallen, und umgekehrt müssen, so oft der eine oder andere der beiden letztgenannten Fälle statt findet, beide Seiten des Dreiecks auf der Grundseite schief stehen.

Fig. 21. 22. 2. Insbesondere aber müssen, wenn ein Perpendikelbogen sa oder sb innerhalb des Dreiecks dsf fällt, die beiden Winkel d und f an der Grundlinie unter sich und mit dem Perpendikelbogen gleichartig sein.

Denn da sad, saf, desgleichen sbd, sbf rechtwinkl. Dreiecke sind, in welchen sa, sb ein Kathet mit den Gegenwinkeln d und f ist, so sind die letztern verm. §. 29, 5 mit sa oder sb und unter sich gleichartig.

Fig. 23. 3. Wenn hingegen beide Perpendikelbogen, sa, sb außerhalb des Dreiecks dsf auf die verlängerte Grundseite adQfb fallen, so sind die Winkel sdf, sfd an der Grundseite ungleichartig, und zwar ist derjenige, sfd, dem zunächst der kleinere Perpendikelbogen sa liegt, stumpf, der andere, sfd, auf dessen Seite der größere Perpendikelbogen sb liegt, ist spitz.

Denn im rechtwinkl. Dreiecke sad ist der Winkel sda spitz (§. 29, 5), mithin sein Nebenwinkel sdf stumpf; desgl. im rechtwinkl. Dreieck sbf ist der Winkel sfb stumpf (§. 29, 5) folglich der Nebenwinkel sfd spitz.

4. Umgekehrt muß, wenn zwei Winkel eines sphär. Dreiecks gleichartig sind, von dem aus der Spitze des dritten Winkels zur gegenüberliegenden Seite oder deren Verlängerung gefällten Perpendikel, allemal ein Bogen innerhalb des Dreiecks fallen und mit jenen Winkeln gleichartig sein.

Denn man setze in den Dreiecken Fig. 21 und 22. die Winkel d und f gleichartig, in jenem beide spitz, in diesem stumpf, so muß immer die Winkelspitze s vom Pol der Seite df verschieden sein, weil wenn s der Pol von df wäre, d und f rechte Winkel sein müßten (§. 7, 6); durch s ist also zu df nur ein einziges Perpendikel bestimmt (§. 25, 6) und von den beiden Bogen desselben kann keiner mit einer Seite des Dreiecks zusammenfallen, weil sonst wieder gegen die Voraussetzung einer der Winkel in d und f ein rechter sein müßte; eben so wenig können beide Perpendikelbogen außerhalb des Dreiecks fallen, weil sonst, gleichfalls der Voraussetzung entgegen, die Winkel in d und f gleichartig sein müßten (3); mithin muß ein Perpendikelbogen und zwar immer der mit den Winkeln d und f gleichartige sa, sb (§. 29, 6) innerhalb des Dreiecks dsf fallen. Fig. 21. 22.

5. Wenn hingegen zwei Winkel eines sphär. Dreiecks ungleichartig sind, so fällt von dem aus der Spitze des dritten Winkels zur gegenüberliegenden Seite oder deren Verlängerung gefällten Perpendikel jeder Bogen außerhalb des Dreiecks, der kleinere zunächst auf die Seite des stumpfen, der größere zur Seite des spitzen Winkels.

Denn setzt man im Dreiecke dsf die Winkel sdf, sfd ungleichartig, jenen stumpf, diesen spitz, so ist zuvörderst wieder klar, daß s vom Pol der Grundseite verschieden (§. 7, 6) und durch s zu df nur ein einziges Perpendikel bestimmt sei (§. 25, 6). Von demselben kann aber, wegen der schiefen Winkel in d und f, kein Bogen mit einer Seite des Dreiecks zusammenfallen; eben so wenig kann ein Bogen innerhalb des Dreiecks fallen, weil sonst, der Voraussetzung entgegen, die Winkel sdf, sfd gleichartig sein müßten (2). Beide Bogen müssen also außerhalb des Dreiecks fallen und zwar muß der dem stumpfen Winkel sdf zunächst zur Seite liegende Bogen, $sa < 90°$ der kleinere sein, weil er die Gegenseite des zum stumpfen sdf gehörigen spitzen Supplementarwinkels sda ist, und zur Seite des spitzen Winkels sfd liegt, seinem stumpfen Nebenwinkel sfb gegenüber, der größere Bogen $sb > 90°$ (§. 29, 6). Fig. 23.

6. Wenn zwei Seiten eines sphär. Dreiecks ungleich und unsupplementarisch sind, so läßt sich aus diesen Datis allein nach keinesweges beurtheilen, welche Lage das aus ihrem Durchschnittspunct zur gegenüberliegenden Seite gefällte Perpendikel

habe, nehmlich da auch die Winkel an der Grundseite ungleich (§. 21, 4) und unsupplementarisch (§. 22, 5 u. 8) sind, so können sie eben sowohl gleichartig als ungleichartig sein, oder es kann auch der eine von ihnen ein rechter sein, während der andere, je nachdem beide zusammen kleiner, oder größer als 180° sind, spitz oder stumpf ist, und eben sowohl kann also auch das Perpendikel verm. S. 4 und 5 mit einem Bogen innerhalb, oder mit beiden außerhalb des Dreiecks, oder auch mit einem Bogen unmittelbar auf eine Seite des Dreiecks fallen.

Eben so ist leicht zu übersehen, daß auch umgekehrt aus der gegebenen Lage der Perpendikelbogen, ob ein Bogen innerhalb, oder mit einer Seite zusammen, oder ob beide Bogen außerhalb des Dreiecks fallen, sich noch keinesweges auf die Gleich- und Ungleichartigkeit der Seiten des Dreiecks schließen lasse.

7. Wenn aber zwei Seiten eines sphär. Dreiecks gleich und unsupplementarisch sind, so muß allemal einer von den aus ihrem Durchschnittspunct zur gegenüberliegenden Seite gefällten Perpendikelbogen, und zwar der kleinere, wenn die Seiten zusammen kleiner als 180°, jede einzelne also kleiner als 90°, der größere, wenn die Seiten zusammen größer als 180°, jede einzelne also größer als 90°, innerhalb des Dreiecks fallen.

Verm. S. 4 und §. 22, 10.

8. Und wenn zwei Seiten eines sphär. Dreiecks ungleich und supplementarisch sind, so müssen allemal von dem aus ihrem Durchschnittspunct zur gegenüberliegenden Seite gefällten Perpendikel beide Bogen ganz außerhalb des Dreiecks, der kleinere zunächst der kleineren, der größere zunächst der größeren Seite fallen.

Fig. 23. Denn setzt man im Dreiecke dsf die Seiten $sd < sf$ zusammen $= 180°$, so hat man auch die Winkel $sfd < sdf$ zusammen $= 180°$ (§. 21, 4 und §. 22, 2), also sfd spitz, sdf stumpf, woraus verm. S. 5 die Behauptung evident wird.

9. Wenn ferner zwei Seiten, und folglich auch zwei Winkel, in einem sphär. Dreieck ungleich und supplementarisch sind und man zieht von der Mitte der dritten Seite bis zur Spitze des gegenüberliegenden Winkels einen Normalkreisbogen, so ist dieser ein Quadrant und halbirt jenen Winkel; oder wenn der Normalkreisbogen von der Spitze jenes Winkels, so daß er denselben halbirt, bis zur gegenüberstehenden Seite gezogen wird, so ist er gleichfalls ein Quadrant und halbirt jene Seite.

Denn bei dem Dreiecke dsf, worin $sd < sf$ zusammen $= 180°$ und also auch $sfd < sdf$ zusammen $= 180°$, fallen beide Perpendikelbogen $sa < 90°$, $sb > 90°$, außerhalb desselben (S. 8); mithin hat man, eben so wie in §. 30, 15,

$ad = bf$ und folglich, wenn man $dQ = fQ$ setzt und den Normalkreisbogen sQ supponirt, auch $aQ = bQ$, sonach ist verm. §. 30, 4, sQ ein Quadrant und zugleich sind verm. §. 30, 37 die Winkel $dsQ = fsQ$. Wenn man dagegen umgekehrt $dsQ = fsQ$ voraussetzt, so hat man wieder verm. §. 30, 37, $dQ = fQ$ und zugleich wegen $ad = bf$, auch $aQ = bQ$ und $sQ = 90°$ (§. 30, 4).

§. 36.

1. Wenn das aus einer Winkelspitze eines sphär. Dreiecks zur gegenüberliegenden Seite gefällte Perpendikel mit einem Bogen innerhalb des Dreiecks fällt, so sollen die beiden Abscissen und die beiden Winkel, in welche jener Bogen die Grundseite und den gegenüberliegenden Winkel zerlegt, in der Folge kürzlich die Abscissen am Perpendikelbogen und die Winkel am Perpendikelbogen genannt werden. So sind z. B. in Fig. 21. die Abscissen am Perpendikelbogen sa diese: ad und af; die Winkel an eben dem Perpendikelbogen sind: asd, asf. Desgleichen sind in Fig. 22. bd, bf die Abscissen, und bsd, bsf die Winkel am Perpendikelbogen sb. — Wenn ferner das Perpendikel mit beiden Bogen außerhalb des Dreiecks auf der verlängerten Grundseite steht, so liegen auch hier an jedem Perpendikelbogen zwischen ihm und den beiden Seiten des Dreiecks zwei Abscissen und zwei Winkel, welche gleichfalls unter den Ausdrücken: die Abscissen und Winkel am kleineren und am größeren Perpendikelbogen in der Folge bezeichnet und unterschieden werden. So sind z. B. in Fig. 23. die Abscissen an kleineren Perpendikelbogen sa die folgenden: ad und adf; die Winkel an eben dem Bogen sind: asd, asf; desgl. sind bf, bfd die Abscissen, und bsf, bsd die Winkel am größern Perpendikelbogen sb. Fig. 21. 22. 23.

2. Wenn in einem sphär. Dreiecke dsf zwei Seiten, sd, sf ungleich und unsupplementarisch sind und es fällt von dem durch ihren Durchschnittspunct s zur dritten Seite df bestimmten Perpendikel ein Bogen sa, sb innerhalb des Dreiecks, so sind auch die Abscissen an diesem Bogen ungleich und zwar liegt allemal, wenn die Seiten sd, sf, wie in Fig. 21., zusammen kleiner als 180° sind, die kleinere Abscisse ad zwischen der kleinern Seite sd und dem Bogen sa, die größere Abscisse af zwischen der größern Seite sf und dem Bogen sa; wenn hingegen die Seiten sd, sf, wie in Fig. 22., zusammen größer als 180° sind, so liegt die kleinere Abscisse bd zwischen der äußern Seite sd und dem Bogen sb, die größere Abscisse bf zwischen der [illegible] Seite sf und dem Bogen sb. Fig. 21. 22.

Denn daß zuvörderst die Abscissen am Perpendikelbogen ungleich sein müssen, erhellt aus §. 26, 1, weil nach demselben, wenn sie gleich wären, der Voraussetzung entgegen, auch die Seiten sd, sf gleich sein müßten. Hat man nun, wie in Fig. 21, $sd+sf<180°$, so sind auch die Winkel $d+f<180°$ (§. 22, 5), folglich ist, da beide gleichartig (§. 35, 2), jeder derselben spitz und $sa<90°$ (§. 29, 6), weshalb verm. §. 30, 13 zwischen sa und der kleinern Seite sd die kleinere, zwischen sa und der größern Seite sf die größere Abscisse liegt. Ist hingegen, wie in Fig. 22, $sd+sf>180°$, so müssen auch die Winkel $d+f>180°$ sein (§. 22, 8), also ist, wegen ihrer Gleichartigkeit (§. 35, 2) jeder derselben stumpf und $sb>90°$ (§. 29, 6), weshalb jetzt wieder verm. §. 30, 13 zwischen sb und der größern Seite sd die kleinere, zwischen sb und der kleinern Seite sf die größere Abscisse liegen muß.

3. Wenn ferner in einem sphär. Dreiecke dsf zwei Winkel d und f ungleich und unsupplementarisch aber gleichartig sind, daß mithin ein Perpendikelbogen sa, sb aus der Spitze des dritten Winkels s zur Grundseite df innerhalb des Dreiecks fällt, so sind auch die Winkel an diesem Bogen ungleich und zwar liegt allemal, wenn die beiden Winkel d und f, so wie in Fig. 21, zusammen kleiner als 180°, also beide spitz sind, der kleinere Winkel asd zwischen der kleinern, nehmlich der dem kleinern Winkel f gegenüberstehenden Seite sd und dem Bogen sa, der größere Winkel asf zwischen der größern, d. h. der dem größern Winkel d gegenüberstehenden Seite sf und dem Bogen sa; wenn hingegen, wie in Fig. 22, die Winkel d und f zusammen größer als 180° also beide stumpf sind, so liegt der kleinere Winkel bsd zwischen der größern, d. h. der dem größern Winkel f gegenüberstehenden Seite sd und dem Bogen sb, der größere Winkel bsf zwischen der kleinern, d. h. der dem kleinern Winkel d gegenüberstehenden Seite sf und dem Bogen sb.

Denn wenn, wie in Fig. 21, d und f beide spitz sind, also $sa<90°$ (§. 29, 6), so ist $af>ad$ (2), folglich auch nach §. 30, 41 den Winkel $asf>asd$. Eben so hat man, wenn, wie in Fig. 22. jeder von den Winkeln d und f stumpf, also $sb>90°$ ist, $bf>bd$ (2), und daher auch den Winkel $bsf>bsd$ (§. 30, 41).

Fig. 24. 25. 4. Wenn in einem sphär. Dreiecke dsf zwei Seiten sd, sf ungleich und unsupplementarisch sind und es fällt das aus ihrem Durchschnittspunct s zur dritten Seite df gefällte Perpendikel mit beiden Bogen sa, sb außerhalb des Dreiecks, so ist, wenn die Seiten sd, sf, wie in Fig. 24, zusammen kleiner als 180° sind, die Summe der Abscissen am kleinern Perpendikelbogen sa, nehmlich $ad+af$ kleiner als 180° und die Summe der Abscissen am größern Perpendikelbogen sb, nehmlich

bf+

bf+bd ist größer als 180°. Wenn aber die Seiten sd, sf, wie in Fig. 25., zusammen größer als 180° sind, so ist die Summe der Abscissen am kleinern Bogen sa, größer, am größern Bogen sb kleiner als 180° oder ad+af>180°, bf+bd<180°.

Denn man nehme überall auf der verlängerten Grundseite die Abscissen aQ=bQ und supponire den Normalkreisbogen sQ, welcher ein Quadrant ist (§. 30, 4). Wenn nun die Seiten sd+sf<180°, so liegen sie entweder wie in Fig. 24. a beide zwischen sQ und sa, oder so wie in Fig 24. b zu verschiedenen Seiten des Quadranten sQ. Eine dritte Lage, in welcher sd, sf beide zwischen sQ und sb sich befinden, ist hier unmöglich, weil sodann jede Seite größer als 90° (§. 30, 7), mithin beide zusammen, gegen die jetzige Annahme, größer als 180° wären. In der ersten Lage, Fig. 24. a ist an und für sich klar, daß ad<bf ist und für die zweite Lage, Fig. 24. b erhellt gleichfalls aus §. 30, 17, daß immer die Abscisse ad<bf sein müsse. Also ist für beide Fälle: ad+df+ad<ad+df+bf d. h. ad+af<180°; desgl. bf+df+bf>bf+df+ad d. h. bf+bd>180°. Sind die Seiten sd+sf>180°, so liegen sie entweder wie in Fig. 25. a beide zwischen sQ und sb, oder wie Fig. 25. b zu verschiedenen Seiten von sQ; eine dritte Lage zwischen sQ und sa widerspricht verm. §. 30, 6 der jetzigen Annahme und ist unmöglich. In der Lage Fig. 25. a aber ist offenbar ad>bf, für die Lage Fig. 25. b erhellt gleichfalls aus §. 30, 17 daß ad>bf sein müsse. Also ist in beiden Lagen ad+df+ad>ad+df+bf d. h. ad+af>180°, und bf+df+bf<bf+df+ad d. h. bf+bd<180°.

5. Wenn ferner in einem sphär. Dreiecke dsf zwei Winkel sdf und sfd ungleich und unsupplementarisch sind und es fällt bei der zugleich statt findenden Ungleichartigkeit dieser Winkel das aus der Spitze des dritten Winkels s zur Grundseite gefällte Perpendikel mit beiden Bogen sa, sb außerhalb des Dreiecks, so ist, wenn die Winkel sdf und sfd, wie in Fig. 24, zusammen kleiner als 180° sind, die Summe der Winkel am kleineren Perpendikelbogen sa kleiner, und am größern Perpendikelbogen sb größer als 180°, nehmlich asd+asf<180°, bsf+bsd>180°. — Wenn dagegen die Winkel sdf und sfd, wie in Fig. 25, zusammen größer als 180° sind, so ist die Summe der Winkel am kleinern Perpendikelbogen sa größer, am größern sb kleiner als 180°, nehmlich asd+asf>180°, bsf+bsd<180°.

Denn wenn sdf+sfd<180°, so sind auch sd+sf<180° (§. 22, 7) und die letzteren haben daher nothwendig eine von den beiden im Beweise des 4ten

Satzes nachgewiesenen Lagen, Fig. 24. a und b, vermöge welcher immer ad < bf ist. Dann aber ist auch, verm. §. 30, 38, Winkel asd < bsf und folglich hat man asd + dsf + asd < asd + dsf + bsf d. h. asd + asf < 180°; eben so bsf + dsf + bsf > bsf + dsf + asd d. h. bsf + bsd > 180°. Wenn sdf + sfd > 180°, so sind auch sd + sf > 180° (§. 22, 9), und nun findet nothwendig nur eine von den vorhin in S. 4 nachgewiesenen Lagen, Fig. 25. a und b statt, bei welchen stets ad > bf folglich auch asd > bsf ist (§. 30, 38). Also hat man asd + dsf + asd > asd + dsf + bsf d. i. asd + asf > 180° und bsf + dsf + bsf < bsf + dsf + asd d. h. bsf + bsd < 180°.

Fig. 23. 6. Sind in einem sphär. Dreiecke dsf zwei Seiten sd, sf oder, was damit eins ist (§. 21, 4. §. 22, 2) zwei Winkel sdf und sfd ungleich aber supplementarisch, daß mithin das aus dem Durchschnittspunct s der Supplementarseiten zur dritten Seite gefällte Perpendikel mit beiden Bogen sa, sb außerhalb des Dreiecks fällt (§. 35, 8), so ist die Summe der Abscissen und Winkel am kleinern wie am größern Perpendikelbogen gleich 180°, nehmlich ad + af = bf + bd = asd + asf = bsf + bsd = 180°.

Denn da ad = bf (§. 30, 15), mithin auch Winkel asd = bsf (§. 30, 36) so hat man eines Theils ad + df + ad = bf + df + bf = ad + df + bf d. h. ad + af = bf + bd = 180°; andern Theils Winkel asd + dsf + asd = bsf + dsf + bsf = asd + dsf + bsf d. i. asd + asf = bsf + bsd = 180°.

7. Wenn umgekehrt das aus dem Durchschnittspunct s zweier Seiten eines sphär. Dreiecks dsf zur dritten Seite gefällte Perpendikel mit beiden Bogen außerhalb des Dreiecks fälle und es ist die Summe der Abscissen am kleinern Bogen gleich der am größern = 180°, oder auch die Winkelsumme am kleinern Bogen wie die am größern = 180°, so müssen auch die Seiten sd, sf und die Winkel d und f des Dreiecks dsf supplementarisch sein.

Denn wenn dieses nicht statt fände, so müßte im unmittelbaren Widerspruch mit der Voraussetzung, vermöge S. 4 u. 5 die Summe der Abscissen und Winkel an dem einen Bogen nothwendig kleiner, am andern größer als 180° sein.

§. 37.

Fig. 22. 1. Wenn alle drei Winkel eines sphär. Dreiecks dsf einzeln spitz sind, so ist auch jede Seite desselben Dreiecks kleiner als ein Quadrant.

Denn wenn aus der Spitze irgend eines Winkels s auf die gegenüber liegende Seite ein Perpendikelbogen sa gezogen wird, der verm. §. 34, 4 in das Dreieck

fällt, so sind im rechtw. Dreiecke sad die Winkel in s und d spitz, folglich ist die Seite sd kleiner als ein Quadrant (§. 32, 2). Auf gleiche Weise erhellt die Behauptung für sf, und wenn der Perpendikelbogen aus d oder f gefällt wird, auch für df.

Die in §. 28, 3 nachgewiesene Eigenschaft des spitzwinkligen gleichseitigen Dreiecks ist also nur ein besonderer Fall des gegenwärtigen Satzes.

2. Wenn dagegen alle drei Winkel eines sphär. Dreiecks einzeln stumpf sind, so ist nicht nothwendig auch jede Seite des Dreiecks größer als ein Quadrant; aber in jedem Fall müssen sodann wenigstens zwei Seiten einzeln größer als ein Quadrant sein, während die dritte kleiner oder auch eben so groß als ein Quadrant sein kann.

Denn in Fig. 19. bei den durch §. 30. bekannten Umständen, ist z. B. im Dreiecke soq jeder Winkel stumpf, aber neben den Seiten so, obq, deren jede größer als ein Quadrant, ist die dritte sq nur ein Quadrant, und im Dreiecke sot ist die dritte Seite st noch kleiner als ein Quadrant. Daß aber in einem Dreieck, dessen drei Winkel stumpf sind, höchstens nur eine Seite ein Quadrant oder kleiner als ein Quadrant sein könne, erhellt so: wären darin zwei Seiten zugleich Quadranten, so müßten auch, gegen die Voraussetzung, die denselben gegenüberstehenden Winkel zwei rechte sein (§. 34, 4); wären darin zwei Seiten, deren eine ein Quadrant, die andere kleiner als ein Quadrant wäre, oder die beide einzeln kleiner als ein Quadrant wären, so betrüge die Summe dieser Seiten und folglich auch die Summe der beiden ihnen gegenüberliegenden Winkel weniger als 180° (§. 22, 5), und es müßte, mithin, gleichfalls im Widerspruch mit der Voraussetzung, wenigstens der eine dieser beiden Winkel ein spitzer sein.

3. Wenn aber in einem sphär. Dreiecke sdf zwei Winkel fds, dsf stumpf sind und der dritte Winkel dfs spitz ist, so ist immer von den beiden den stumpfen Winkeln gegenüberliegenden Seiten fs, fd jede einzelne größer als ein Quadrant, und die dritte, dem spitzen Winkel gegenüber liegende Seite sd ist kleiner als ein Quadrant. Fig. 26.

Denn es werde zuerst aus dem Scheitel des spitzen Winkels f ein Perpendikelbogen fr, der verm. §. 35, 4 innerhalb des Dreiecks liegt, auf die gegenüberliegende Seite sd gefällt, so ist im rechtw. Dreiecke frs der Winkel in s stumpf, hingegen der Winkel rfs spitz, folglich fs größer als ein Quadrant (§. 32, 2). Eben so erhellt auch die Behauptung für die Seite fd. — Es werde ferner noch aus

der Spitze des einen stumpfen Winkels s auf die Verlängerung der opponirten Seite ein Perpendikel gefällt, das mit beiden Bogen sa, sb außerhalb des Dreiecks sdf liegen muß (§. 35, 5), so daß der kleinere Bogen sa zunächst dem stumpfen Winkel sdf sich befindet. Da nun adfb ein Halbkreis und df größer als ein Quadrant, mithin ad kleiner als ein Quadrant ist, so ist in dem bei a rechtw. Dreiecke sad die Seite sd verm. §. 32, 1 kleiner als ein Quadrant.

4. Wenn alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks einzeln größer als ein Quadrant sind, so ist auch jeder Winkel desselben Dreiecks stumpf.

Denn im Polardreieck eines solchen Dreiecks sind alle Winkel spitz (§. 17, 4), folglich alle Seiten einzeln kleiner als ein Quadrant (S. 1) und daher wiederum auch im ursprünglichen Dreiecke alle Winkel stumpf.

Der in §. 24, 3 nachgewiesene Satz in Betreff des gleichseitigen Dreiecks, dessen Seiten einzeln größer als ein Quadrant sind, ist also nur ein besonderer Fall des hier erwiesenen.

5. Wenn dagegen alle drei Seiten eines sphär. Dreiecks einzeln kleiner als ein Quadrant sind, so ist nicht nothwendig auch jeder Winkel des Dreiecks ein spitzer Winkel; doch müssen wenigstens zwei Winkel spitz sein, der dritte kann ein stumpfer oder auch ein rechter Winkel sein.

Dieser Satz erhebt aus ganz ähnlichen Schlüssen wie der vorhergehende vermöge §. 17, 4 und S. 2.

6. Wenn aber zwei Seiten eines sphär. Dreiecks einzeln kleiner, die dritte Seite hingegen größer als ein Quadrant ist, so sind immer die den erst genannten beiden Seiten gegenüberstehenden Winkel spitz und der dritte Winkel, welcher der Seite, die größer als ein Quadrant ist, gegenüberliegt, ist stumpf.

Auch dieser Satz ergiebt sich auf gleiche Weise durch die Zuziehung des Polardreiecks aus §. 17, 4 und S. 3.

Das fünfte Kriterium der Identität sphärischer Dreiecke.

§. 38.

1. Mit zwei Normalkreisbogen und einem sphärischen Winkel, wenn dieselben nur den allgemeinen Bedingungen der Natur des sphärischen Dreiecks überhaupt entsprechen, d. h. sämmtlich einzeln kleiner als 180° sind (§. 18), ist, vermöge §. 19. immer ein in allen Elementen völlig bestimmtes sphärisches Dreieck gesetzt, sofern darin der gegebene Winkel von den beiden gegebenen Seiten eingeschlossen wird; wenn dagegen die gegebenen Elemente eine solche Lage erhalten sollen, daß nur die eine der beiden Seiten dem Winkel anliegt, während die andere ihm gegenüber steht, so ist, ungeachtet die Data den durch §. 18. vorgeschriebenen Erfordernissen gleichfalls unterworfen bleiben, dennoch nicht immer ein einziges, in allen Theilen völlig bestimmtes Dreieck mit ihnen gesetzt, sondern unter mancherlei Umständen können auch aus denselben Elementen entweder zwei oder auch mehr ganz von einander verschiedene Dreiecke construirt werden, oder aber es ist auch gar kein Dreieck aus den Datis zu Stande zu bringen.

Die folgende Darstellung liefert den Beweis dieser Behauptung, indem sie unter Erschöpfung aller hier möglichen Kategorien die sämmtlichen Fälle vorführt, in welchen unter bestimmten Größenverhältnissen der gegebenen Elemente die Aufgabe theils völlig bestimmt, theils zwei- oder vieldeutig, theils überbestimmt d. h. widersprechend und in der Construction unausführbar ist. Es wird dabei von den Datis der Winkel allemal durch r, die ihm gegenüberstehende Seite durch R, die ihm anliegende Seite durch L bezeichnet; außerdem wird noch von den nicht gegebenen Stücken der der Seite L gegenüberstehende Winkel mit l angedeutet.

I. Untersuchung der Fälle, in welchen entweder zwei oder alle drei gegebene Elemente einzeln $= 90°$ sind.

A. Wenn r und L beide einzeln $= 90°$ sind, so muß auch $R = 90°$ sein (§. 29, 2). Es ist also entweder wirklich auch $R = 90°$ gegeben und dann ist verm. §. 29,

4 auch $l = 90°$, aber der dritte Winkel und seine Gegenseite können jede Größe unter 180° haben, daß mithin die Aufgabe vieldeutig ist und unzählig viel Dreiecke zuläßt; — oder es ist $R \gtrless 90°$ gegeben, und dann ist folglich die Aufgabe überbestimmt und kein ihr entsprechendes Dreieck möglich.

B. Wenn r und R beide einzeln $= 90°$ sind, so ist nicht nothwendig auch $L = 90°$ (§. 29, 3). Es ist also entweder wirklich auch $L = 90°$ gegeben, und dann ist nach §. 29, 4 die Aufgabe vieldeutig — oder es ist $L \gtrless 90°$ gegeben und dann ist an Graden $l = L$, der dritte Winkel und seine Gegenseite sind beide $= 90°$ (§. 29, 4), folglich, da jedes Element unabänderlich bestimmt ist, auch die Aufgabe in diesem Fall völlig bestimmt.

C. Wenn L und R beide einzeln $= 90°$ sind, so muß auch $r = 90°$ sein (§. 34, 4). Es ist also wirklich entweder $r = 90°$ gegeben, und dann ist aus den dortigen Gründen die Aufgabe vieldeutig; — oder $r \gtrless 90°$ macht die Aufgabe überbestimmt.

II. Untersuchung der Fälle, in welchen nur eins unter den gegebenen Elementen $= 90°$ ist.

Da hier L und R niemals zugleich Quadranten sein können, also ihr Durchschnittspunct immer vom Pol der dritten Seite verschieden sein muß (§. 9, 4), so kann überall dieser Durchschnittspunct in Fig. 19. durch s und die dritte Seite durch eine den weiteren Bedingungen gemäße Abscisse des zum Pol P gehörigen Grundkreises aQbq vorgestellt werden und es ist zum voraus klar, daß die in §. 30. entwickelten Resultate für die hier nöthigen Entscheidungen ihre völlige Anwendung finden müssen. Die folgenden ohne Ziffenzahl aufgeführten Citate beziehen sich daher sämmtlich auf §. 30.

Die zu dieser Kategorie gehörigen Fälle sind nun folgende:

Fig. 19. A. Wenn $r = 90° = saQ$; $L < 90° = sa$, und es ist

1) R kleiner als L, oder

2) $R = L$, so ist die Aufgabe überbestimmt (1).

3) R größer als L und kleiner als das Supplement von L, nehmlich größer als sa, kleiner als sb, so ist die Aufgabe bestimmt und $l < 90°$.

Denn ein solches R kann nur zweimal zwischen s und dem Grundkreise um gleiche Abscissen, z. B. $af = ag$, von L entfernt in $sf = sg$, vorkommen (19). Daher ist neben dem ein für allemal präcludirten Afterdreiecke saQbg nur ein einziges völlig bestimmtes Dreieck, saf möglich, worinn $l < 90°$ (20).

4) R größer als L und dem Supplement von L gleich, oder

5) R größer als L und größer als das Supplement von L, so ist die Aufgabe überbestimmt (1).

B. Wenn $r = 90° = sbQ$ und $L > 90° = sb$, und es ist

1) R kleiner als L und kleiner als das Supplement von L, oder

2) R kleiner als L und gleich dem Supplement von L, so ist die Aufgabe überbestimmt (1).

3) R kleiner als L und größer als d. Supplem. von L, so ist die Aufgabe bestimmt und $l > 90°$. (Aus gleichen Gründen wie in A, 3).

4) $R = L$ oder 5) R größer als L macht d. Aufg. überbest. (1).

C. Wenn $r < 90° = sda$ und auch $L < 90° = sd$ und mithin verm. d. Kateg. $R = 90°$, so ist die Aufgabe bestimmt und $l < 90°$.

Denn dieses R kann auf jeder Seite des durch s supponirten Perpendikels asb nur einmal in sQ und sq, wenn $aQ = aq = 90°$, statt finden (5), daher außer dem ungültigen Afterdreiecke sdaqbQ nur das eine wirkliche Dreieck sdaq bestimmt, worin $l < 90°$ (20).

D. Wenn $r < 90° = sQa$ und $L = 90° = sQ$, und es ist

1) R an Graden kleiner als r, so ist d. Aufg. überbest. (5 und 1).

2) R an Graden gleich r, so ist d. Aufg. bestimmt und $l = 90°$ (§. 34, 4).

3) R an Graden größer als r und kleiner als 90°, so ist d. Aufg. zweideutig; es sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, bei welchen insbesondere der Winkel l des einen das Supplement von l des andern ist.

Denn da ein $R > r$ auch größer als der dem r opponirte kleinere Perpendikelbogen sa ist (5), so findet dasselbe, da es zugleich kleiner als 90°, also um so mehr auch kleiner als der größere Perpendikelbogen sb ist, unfehlbar zwischen s und dem Grundkreise (18) jedoch auf jeder Seite des Perpendikels nur einmal statt (19), und jede der gleichen Abscissen, wie z. B. $ad = ah$ zwischen $R = sd = sh$ und sa muß kleiner als 90° sein (8). Mithin ist in den Dreiecken sQh, sQd, weil $aQ = 90°$, neben L und R auch die dritte Seite aQ + ah d. h. hQ eben sowohl als dQ kleiner als 90°; beide sind demnach wirkliche aber völlig verschiedene Dreiecke und da, wegen $ad = ah$ auch $sha = sda$ (31) und $sda + sdQ = 180°$, so ist auch $sha + sdQ = 180°$, d. h. die Winkel l sind in beiden Dreiecken einer des andern Supplement.

4) R an Graden größer als r und größer als 90° macht die Aufgabe überbestimmt.

Denn wenn $R > r$ auch größer als sb ist, so ist die Behauptung klar (1); ist $R = sb$, so giebt es nur ein Afterdreieck sQaqb; ist $R < sb$, so kommt es, wie $sf = sg$, auf jeder Seite des Perpendikels einmal vor (19), aber wegen $ag = af > 90°$ (9) sind gleichfalls nur Afterdreiecke möglich.

E. Wenn $r < 90° = sfQ$ und $L > 90° = sf$, also verm. d. Kateg. $R = 90°$, so ist aus gleichen Gründen wie in C d. Aufg. bestimmt und $l > 90°$.

F. Wenn $r > 90° = sdQ$ und $L < 90° = sd$, also d. Kateg. gemäß $R = 90°$, so ist gleichfalls wie in C und E d. Aufg. bestimmt und $l < 90°$.

G. Wenn $r > 90° = sQb$ und $L = 90° = sQ$ und es ist

1) R an Graden kleiner als r und zugleich kleiner als 90°, so ist d. Aufg. überbestimmt. (Aus ganz ähnlichen Schlüssen wie in D, 4).

2) R an Graden kleiner als r und größer als 90°, so ist d. Aufg. zweideutig; es sind zwei wirkliche verschiedene Dreiecke, wie sQf, sQg möglich, in denen die Winkel l supplementarisch sind. (Der Beweis ist dem in D, 3 ganz ähnlich).

3) R an Graden gleich r, so ist d. Aufg. bestimmt und $l = 90$. (Wie in D, 2 verm. §. 34, 4).

4) R an Graden größer als r macht d. Aufgabe überbestimmt. (Wie in D, 1 nach §. 5 und 1).

H. Wenn $r > 90° = sfb$ und auch $L > 90° = sf$, also der Kategorie gemäß $R = 90°$, so ist, wie in C, E und F d. Aufg. bestimmt und $l > 90°$.

III. Untersuchung der Fälle, in welchen kein einziges der gegebenen Elemente $= 90°$ ist.

Da auch in dieser Kategorie, aus gleichen Gründen wie in der vorigen, der Durchschnittspunct der Seiten L und R niemals der Pol der dritten Seite sein kann, so treten auch in allen hieher gehörigen Fällen, wie dort, die Sätze des 30sten Sphen in vollkommne Anwendung. — Man kann übrigens hier zunächst diejenigen Fälle, in welchen L und R gleich sind, zusammen fassen und in dieser Abtheilung können daher L und R niemals supplementarisch sein, weil sonst, der Kategorie entgegen $L = R = 90°$ sein müßte. In den Fällen hingegen, in welchen L und R ungleich sind, werden wiederum diejenigen, in welchen diese Seiten supplementarisch sind, von denen, in welchen sie es nicht sind, unterschieden und so findet die folgende Eintheilung aller zur Kategorie gehörigen Fälle in nachstehende drei Classen statt.

1ste Classe. L und R sind gleich.

A. Wenn $r < 90° = sda$ und auch $L < 90° = sd$, so ist d. Aufg. bestimmt.

Denn

Denn da ad<90° (8) und R=L nur auf der entgegengesetzten Seite des Perpendikels, wo ah=ad, in sh statt finden kann (19) so ist, da ad+ah=dh kleiner als 180°, nur das eine wirkliche Dreieck sdh möglich.

B. Wenn r<90°=sfQ und L>90°=sf, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn da af>90° (9), folglich auch R=L=sg um ag=af>90° von sa entfernt liegt (11) und außer diesem kein anderes R möglich ist (19), so ist immer das Dreieck sfag, worin die Seite fag>180°, ein ungültiges Afterdreieck.

C. Wenn r>90°=sdQ und L<90°=sd, so ist die Aufgabe überbestimmt (wie in B.).

D. Wenn r>90°=sfb und auch L>90°=sf, so ist die Aufgabe bestimmt (wie in A.).

2te Classe. L und R sind ungleich aber supplementarisch.

A. Wenn r<90°=sda und L<90°=sd, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn R kann nur auf jeder Seite des Perp. einmal statt finden (19); aber auf der einen Seite in sg ist es nur die unmittelbare Verlängerung von L und giebt daher gar kein Dreieck; auf der andern Seite liegt es zwischen L und dem größern Perpendikelbogen sb in sf (13), wo es nur ein Afterdreieck sdaqbf bildet.

B. Wenn r<90°=sfQ und L>90°=sf, so ist die Aufgabe bestimmt.

Denn jetzt fällt das allein brauchbare R zwischen L und sa in sd (13) und bildet das wirkliche Dreieck sfd.

C. Wenn r>90°=sdQ und L<90°=sd, so ist die Aufgabe bestimmt.

Denn, wie in B, entsteht das eine wirkliche Dreieck sdf.

D. Wenn r>90°=sfb und L>90°=sf, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn wie in A ist entweder gar kein, oder nur ein Afterdreieck sfqad möglich.

3te Classe. L und R sind ungleich und unsupplementarisch.

A. Wenn r<90°=sda und L<90°=sd und es ist

1) R (kleiner als L) kleiner als der dem gegebenen r opponirte kleinere Perpendikelbogen sa, so ist die Aufg. überbestimmt (1).

2) R (kleiner als L) gleich dem kleinern Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe bestimmt und l=90° (1).

3) R kleiner als L und größer als der kleinere Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe zweideutig und in den beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Winkel l supplementarisch.

Denn ein R größer als sa und kleiner als sd, um so mehr also auch kleiner als sb (1) kommt auf jeder Seite des Perpendikels einmal vor (18. 19), und zwar von sa um eine Abscisse, wie z. B. ae=ai entfernt, die allemal kleiner als ad sein muß (5). Jedes R=se=si giebt daher unfehlbar mit den übrigen Elementen ein wirkliches, kein Afterdreieck sde, sdi, da ad<90° (8), also nicht nur ed<180°, sondern auch ad+ai d. i. di<180° ist. Weil übrigens Winkel sed=sih (31) und sih+sid=180°, so ist auch sed+sid=180°, d. h. in beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Winkel l supplementarisch.

4) R größer als L und zugleich kleiner als das Supplement von L, so ist die Aufgabe bestimmt und l<90°.

Denn ein R größer als L also auch größer als sa und zugleich kleiner als 180°—L, also auch kleiner als sb (1), findet auf jeder Seite des Perpendikels einmal statt (18. 19); jedoch sind die Abscissen, wie z. B. am=ax zwischen R und sa jede größer als ad (5). Daher das Dreieck, welches durch das mit L auf einer und derselben Seite des Perpendikels liegende R=sm gebildet wird, nothwendig nur ein Afterdreieck sdaqbm; dagegen muß das allein noch mögliche durch das zweite R=sx gebildete Dreieck sdx immer ein wirkliches sein.

Denn supponirt man das Supplement von L, nehmlich dessen Verlängerung sg, so ist daqg=180° (§. 6, 5); da nun sx<sg verm. der Voraussetz. also auch ax<ag (3), so ist auch dax<daqg, d. h. im Dreieck sdx ist, gleich L und R, auch die dritte Seite dx<180°, und dasselbe folglich jedesmal ein wirkliches, kein Afterdreieck (§. 14, 8); überdies ist darin immer l<90° (20).

5) R größer als L und auch größer als das Supplement von L, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn wenn R vollends größer als sb, so findet es gar keinen Platz zwischen s und dem Grundkreise (1). Ist R=sb, so giebt es offenbar nur ein Afterdreieck sdaqb. Wenn endlich R kleiner als sb ist, so ist es zwar auf jeder Seite des Perpendikels einmal möglich; aber weil jede der zwischen R und sa befindlichen Abscissen, wie z. B. ao=au nicht nur größer als ad, sondern auch größer als die zwischen sa und dem Supplement von L, sg befindliche Abscisse ag ist (3), so muß nicht nur das durch das ein R=so gebildete Dreieck sdaqbo, sondern auch das mit dem zweitem R=su zusammengehörige sdau jedesmal ein Afterdreieck sein.

B. Wenn $r < 90° = sfQ$ und $L > 90° = sf$ und es ist

1) R (kleiner als L), kleiner als der kleinere Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe überbestimmt (1).

2) R (kleiner als L) gleich dem kleineren Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe bestimmt und $l = 90°$ (1).

3) R kleiner als L und größer als der kleinere Perpendikelbogen sa, zugleich aber auch kleiner als das Supplement von L, so ist die Aufgabe zweideutig und in beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Winkel l supplementarisch.

Denn ein solches R findet auf jeder Seite des Perpendikels einmal statt (18. 19). Auf der Seite, wo L liegt, ist es zwischen diesem und sa (3), z. B. in se und giebt unbedenklich ein wirkliches Dreieck sfe; auf der andern Seite, wo das Supplement von L, dessen Verlängerung sh, sich befindet, fällt es zwischen dieses und sa (3), z. B. in si und giebt also auch hier immer noch ein wirkliches, kein Afterdreieck, sfai. Da überdies ae = ai (11), Winkel sih = sef (31) und sih + sia = 180°, also auch sef + sia = 180°, so sind in beiden Dreiecken die Winkel l supplementarisch.

4) R kleiner als L und größer als das Supplement von L, so ist die Aufgabe bestimmt und $l > 90°$.

Denn alles ist wie vorhin, nur fällt das mit sh auf gleicher Seite des Perpendikels liegende R jetzt über sh hinaus (3) und bildet daher kein wirkliches Dreieck mehr, sondern es bleibt allein das auf der entgegengesetzten Seite des Perpendikels befindliche als das einzige übrig, worin $l > 90$ verm. S. 20.

5) R größer als L, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn wenn R auch größer als sb so ist gar kein Dreieck, wenn es so groß oder kleiner als sb ist, so sind aus vorhin berührten Gründen nur Afterdreiecke möglich.

C. Wenn $r > 90° = sdQ$ und $L < 90° = sd$ und es ist

1) R kleiner als L, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn wenn R zugleich kleiner als sa ist, so kann gar kein Dreieck zu Stande kommen, und wenn es eben so groß oder auch größer als sa ist, so können aus bekannten Gründen nur Afterdreiecke entstehen.

2) R größer als L und kleiner als das Supplement von L, so ist die Aufgabe bestimmt und $l < 90°$.

Denn da R größer als L mithin auch größer als sa und zugleich kleiner als $180° - L$, also auch kleiner als sb ist (1), so kommt es auf jeder Seite des Perpendikels

einmal vor (18. 19). Auf derjenigen, wo das Supplement sg oder die Verlängerung von L liegt, fällt es, wie z. B. sr, zwischen sg und sa (3) und kann daher nur ein Afterdreieck, sdQbr geben; auf der entgegengesetzten Seite allein giebt R wie z. B. sm offenbar immer ein wirkliches Dreieck sdm, in welchem $1<90°$ (20).

3) R größer als L und größer als das Supplement von L, aber noch kleiner als der größere Perpendikelbogen sb́, so ist die Aufg. zweideutig und in beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Winkel 1 supplementarisch.

Denn nun fällt das mit sg auf gleicher Seite des Perpendikels liegende R nicht mehr zwischen sg und sa, sondern, wie z. B. su, zwischen sg und sb (3), und es ist deshalb, neben dem durch das eine R=so gebildeten Dreiecke dso, auch das mit R=su zusammengehör. sdQu jedesmal ein wirkliches, kein Afterdreieck. Die Winkel 1 sind aus bekannten Gründen supplementarisch.

4) R (größer als L) gleich dem, dem gegebenen r entgegenstehenden Perpendikelbogen sb, macht die Aufgabe bestimmt und $1=90°$ (1).

5) R (größer als L) größer als jener Bogen sb macht die Aufgabe überbestimmt (1).

D. Wenn $r>90°=sfb$ und auch $L>90°=sf$ und es ist

1) R kleiner als L und zugleich kleiner als das Supplement von L, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn wenn R auch kleiner als sa, so kann gar kein Dreieck, außerdem können aber nach schon geläufigen Schlüssen nur Afterdreiecke entstehen.

2) R kleiner als L und größer als das Supplement von L, so ist die Aufgabe bestimmt und $1>90°$.

Denn von den zwei nur möglichen R (18. 19) bildet das mit L auf derselben Seite des Perpendikels liegende, offenbar nur ein Afterdreieck; das zweite auf der andern Seite befindliche, fällt, wie z. B. st, zwischen sh und sb (3) und giebt mithin das eine wirkliche Dreieck sfbt, worin $1>90°$ (20).

3) R größer als L aber noch kleiner als der dem gegebenen r opponirte Perpendikelbogen sb, so ist die Aufgabe zweideutig und in beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Winkel 1 supplementarisch.

Denn von den beiden nur möglichen R (18. 19) fällt jetzt auch das mit L auf derselben Seite des Perpendikels liegende, wie z. B. so, zwischen L und sb (3),

und es sind daher zwei wirkliche Dreiecke sko, sfu möglich, in welchen aus mehrmals erwähnten Gründen die Winkel l supplementarisch sind.

4) R (größer als L) gleich dem Perpendikelbogen sb, so ist die Aufgabe bestimmt (1).

5) R (größer als L) größer als der Perpendikelbogen sb macht die Aufgabe überbestimmt (1).

2. Da in der obigen Untersuchung alle nur mögliche Fälle, welche bei der Bestimmung eines sphär. Dreiecks aus den Elementen r, L, R vorkommen können, erschöpft sind, so kann man danach jedesmal mit Sicherheit beurtheilen, ob entweder gar kein Dreieck, oder nur ein einziges, oder zwei oder mehrere den gegebenen Elementen entsprechen. Weiß man übrigens aus anderweitigen Gründen zum voraus, daß die Data keinen solchen Widerspruch mit sich führen, mit welchem ein Dreieck schlechthin unmöglich ist, so daß es allein nur noch unentschieden ist, ob entweder nur ein einziges, oder zwei oder mehr Dreiecke aus denselben Datis möglich sind, so werden die Resultate der Untersuchung einfacher, indem vermöge der bereits anerkannten Möglichkeit des Dreiecks diejenigen Bestimmungen aus ihnen, welche bloß diese Möglichkeit im Allgemeinen sichern, alsdann von selbst als überflüssig fortfallen.

Mit den Modificationen, welche auf diese Weise zunächst diejenigen Behingungen erleiden, unter welchen nach der obigen Entwickelung nur ein einziges Dreieck gesetzt ist, hat es folgende Bewandniß.

Vermöge Kateg. II. A, 3 ist die Construction bestimmt, wenn $r=90°$, $L<90°$, $R>L$ und $R<180°-L$ ist. Es ist aber dort unter übrigens gleichen Umständen vermöge A, 4 und A, 5 ein Dreieck ganz unmöglich, sowohl wenn $R=180°-L$ als auch wenn $R>180°-L$ ist. Mithin kann man die Bedingung: $R<180°-L$ ganz fallen lassen, wenn zum voraus schon die Möglichkeit eines Dreiecks gesichert ist und es würden demnach allein die Bestimmungen: $r=90°$, $L<90°$, $R>L$ beibehalten werden. Es wird nun aber ferner noch neben den ersten beiden dieser Bestimmungen durch ein $R<L$, so wie durch ein $R=L$ verm. A, 1 und A, 2 die Möglichkeit eines Dreiecks gleichfalls schlechthin aufgehoben; folglich bleibt, wenn man vom Gegentheil schon einmal versichert ist, allein die folgende Regel übrig: wenn $r=90°$, $L<90°$, so ist ein einziges Dreieck bestimmt, worin $l<90°$, es möge R eine Größe unter 180° haben, welche es wolle. — Gleiche Modification erleidet die Bestimmung in B, 3 mit B, 4, 5, 1 und 2 verglichen.

Aehnliche Beschränkungen finden statt in der 3ten Classe der Kateg. III. — Es ist dort nach A, 4 ein einziges Dreieck gesetzt, wenn $r<90°$, $L<90°$, $R>L$ und $R<180°-L$ ist. Aber verm. A, 5 ist unter übrigens gleichen Umständen mit $R>180°-L$ gar kein wirkliches Dreieck möglich; mithin bleiben, wenn hier, so wie im folgenden, die Realität der Construction dennoch vorausgesetzt ist, nur die Bestimmungen: $r<90°$, $L<90°$, $R>L$ nöthig. Aber wenn

$$r<90°, L>90°, R>L,$$

so ist vermöge B, 5 ein wirkliches Dreieck gleichfalls unmöglich; folglich bleibt das Resultat: wenn $r<90°$ und $R>L$, so ist die Aufgabe bestimmt und $l<90°$. — Ferner ist nach B, 4 unter den Bedingungen: $r<90°$, $L>90°$, $R<L$, $R>180°-L$ ein einziges Dreieck gesetzt. Aus der Vergleichung mit B, 5 aber geht die Regel hervor: wenn $r<90°$, $L>90°$ und $R>180°-L$, so ist ein Dreieck bestimmt, worin $l>90°$. — Gleiche Einschränkung erleidet auch die Bestimmung in C, 2 in Vergleich mit C, 1; desgleichen modificirt sich das Resultat in D, 2 mit Rücksicht auf D, 1 und C, 1 eben so wie vorhin das in A, 4.

In Betreff der Vereinfachung derjenigen Bedingungen, unter welchen mehr als ein Dreieck möglich ist, ergiebt sich das folgende.

In Kateg. II, D, 3 ist entschieden, daß mit $r<90°$, $L=90°$, $R>r$ und $R<90°$ ein Doppeldreieck gesetzt sei. Durch D, 4 wird hier sogleich schon die Bedingung: $R<90°$ überflüssig gemacht, und da überdies nach D, 1 und 2 ein $R<r$ die Möglichkeit und ein $R=r$ die Zweideutigkeit der Construction aufhebt, so bleibt die Regel: $r<90°$, $L=90°$, R an Graden ungleich r bestimmen ein Doppeldreieck. — Gleiche Bewandniß hat es mit den Bedingungen in G, 2.

Endlich ist in der 3ten Classe der Kateg. III. verm. A, 3 durch $r<90°$, $L<90°$, $R<L$ und $R>sa$ die Construction zweideutig; aber die Entscheidungen in A, 1 und 2 machen hier die Bedingung: $R>sa$ überflüssig. — Ferner ist in B, 3 mit $r<90°$, $L>90°$, $R<L$, $R>sa$ und $R<180°-L$ ein Doppeldreieck gesetzt; jedoch vernichten B, 1 und 2 die vorletzte und B, 5 die vorvorletzte Bedingung und es existirt: wenn $r<90°$, $L>90°$ und $R<180°-L$, so ist die Construction zweideutig. — So wie hier B, 3 wird auch C, 3 und so wie vorhin A, 3 wird auch D, 3 vereinfacht.

Der leichteren Uebersicht und des nachmaligen Gebrauchs wegen sind unter dieser einfacheren Gestalt die Resultate in den beiden folgenden Nummern des Sphen der Reihe nach aufgeführt, wo zugleich die jedesmalige Art des Winkels l, in den Fällen, die ein einziges Dreieck bestimmen, mit bemerkt worden ist.

5. Durch die Elemente r, L, R ist ein einziges Dreieck bestimmt, vorausgesetzt, daß die Construction eines wirklichen Dreiecks nicht schlechthin unmöglich ist.

I. Sofern mehr als eins der gegebenen Elemente $= 90°$ sind:

1) wenn $r = 90°$, $L \gtrless 90°$, $R = 90°$ . . . l an Graden $= L$.

II. Sofern nur eins der gegebenen Elemente $= 90°$ ist:

2) wenn $r = 90°$, $L < 90°$, $R \gtrless 90°$ . . . $l < 90°$.
3) " $r = 90°$, $L > 90°$, $R \gtrless 90°$ . . . $l > 90°$.
4) " $r < 90°$, $L < 90°$, $R = 90°$ . . . $l < 90°$.
5) " $r < 90°$, $L = 90°$, R an Graden $= r$ . . . $l = 90°$.
6) " $r < 90°$, $L > 90°$, $R = 90°$ . . . $l > 90°$.
7) " $r > 90°$, $L < 90°$, $R = 90°$ . . . $l < 90°$.
8) " $r > 90°$, $L = 90°$, R an Graden $= r$ . . . $l = 90°$.
9) " $r > 90°$, $L > 90°$, $R = 90°$ . . . $l > 90°$.

III. Sofern keins der gegebenen Elemente $= 90°$, und

1stens die gegebenen Seiten L und R gleich sind:

10) wenn $r < 90°$, $L < 90°$, $R = L$ . . . $l < 90°$.
11) " $r > 90°$, $L > 90°$, $R = L$ . . . $l > 90°$.

2tens die gegebenen Seiten L u. R ungleich aber supplementarisch:

12) wenn $r < 90°$, $L > 90°$, $R = 180° - L$ . . . $l > 90°$.
13) " $r > 90°$, $L < 90°$, $R = 180° - L$ . . . $l < 90°$.

3tens d. gegeb. Seit. L u. R ungleich und unsupplementar, und zwar

a) falls R ein dem r entgegenstehender Perpendikelbogen:

14) wenn $r < 90°$, $L < 90°$, $R < 90°$ . . . $l = 90°$.
15) " $r < 90°$, $L > 90°$, $R < 90°$ . . . $l = 90°$.
16) " $r > 90°$, $L < 90°$, $R > 90°$ . . . $l = 90°$.
17) " $r > 90°$, $L > 90°$, $R > 90°$ . . . $l = 90°$.

b) falls R vom Perpendikelbogen verschieden:

18) " $r < 90°$ und $R > L$ . . . $l < 90°$.
19) " $r < 90°$, $L > 90°$, $R > 180° - L$ . . . $l > 90°$.
20) " $r > 90°$, $L < 90°$, $R < 180° - L$ . . . $l < 90°$.
21) " $r > 90°$ und $R < L$ . . . $l > 90°$.

4. Durch die Elemente r, L, R ist mehr als ein Dreieck bestimmt, vorausgesetzt daß die Construction eines wirklichen Dreiecks nicht schlechthin unmöglich ist.

I. Sofern mehr als eins der gegebenen Elemente $=90°$:

1) wenn $r=90°$ und $L=90°$, in welchem Falle auch $R=90°$ sein muß und unzählig viel Dreiecke möglich sind.

II. Sofern nur eins der gegebenen Elemente $=90°$:

2) wenn $r<90°$, $L=90°$, R an Graden ungleich r. In diesem Falle, so wie in allen folgenden sind zwei Dreiecke möglich, in denen allemal die Winkel l supplementarisch sind,

3) wenn $r>90°$, $L=90°$, R an Graden ungleich r.

III. Sofern keins der gegebenen Elemente $=90°$ und die gegebenen Seiten L und R unsupplementarisch sind:

4) wenn $r<90°$, $L<90°$, $R<L$.

5) " $r<90°$, $L>90°$, $R<180°-L$.

6) " $r>90°$, $L<90°$, $R>180°-L$.

7) " $r>90°$, $L>90°$, $R>L$.

Fig. 10. 5. Mit Bezug auf die bisherigen Entwickelungen dieses Sphen läßt sich nun auch das fünfte Kennzeichen der Identität sphärischer Dreiecke in seinem ganzen Umfange folgendermaßen aussprechen:

Wenn in zwei sphärischen Dreiecken abd und efg oder abd und hik ein Winkel nebst der anliegenden und gegenüberstehenden Seite der Reihe nach gleich sind, nehmlich $b=f=i$, $ab=ef=hi$ und $ad=eg=hk$, und wenn dabei die genannten Elemente unter irgend einer von den in S. 3 aufgeführten 21 Bedingungen stehen, so sind die Dreiecke identisch.

Denn wenn die Dreiecke abd, efg so auf einander gelegt werden, daß die gleichen Seiten ab und ef sich decken, indem die Endpuncte e und a, f und b identisch werden, so muß, wegen der gleichen Winkel in b und f, auch die Seite fg auf bd fallen und die Seite eg muß daher auch zwischen a und irgend einem Punct der Seite bd fallen. Dieser Punct kann aber kein anderer sein, als d; denn wäre es irgend ein von d verschiedener und um weniger als 180° von ihm entfernter Punct s, so gäbe es von a aus nach der Grundseite bd oder deren Verlängerung zwei Bogen ad und $eg=as$, deren jeder mit denselben Elementen, nehmlich dem Winkel b und der anliegenden Seite ab ein eigenes wirkliches Dreieck bildete, daß mithin durch die genannten Elemente $b=f$, $ab=ef$, $ad=eg$ nicht ein einziges, sondern wenigstens zwei völlig von einander verschiedene wirkliche

liche Dreiecke bestimmt wären. Da dieses aber der Voraussetzung geradehin widerspricht, so muß der Punct g auf d fallen und die Seite eg die ad decken und es sind folglich beide Dreiecke abd, efg congruent und identisch. — Sind aber die Dreiecke, nicht, wie die eben betrachteten, von gleicher, sondern wie abd und hik von entgegengesetzter Conveπität, daß keine unmittelbare Congruenz zwischen ihnen statt finden kann, so ergiebt sich aus der eben so wie vorhin demonstrirten Congruenz zwischen hik und des Dreiecks abd Gegendreieck auch die Identität zwischen abd und hik selber (§. 16, 3).

6. Aufgabe. Es sind gegeben zwei Normalkreisbogen L und R und ein sphärischer Winkel r, die den allgemeinen Bedingungen der Natur des sphärischen Dreiecks entsprechen, d. h. einzeln sämmtlich kleiner als 180° sind (§. 18): es soll eine Construction vorgenommen werden, welche entweder, falls die Aufgabe überbestimmt ist, dieses auf das entschiedenste offenbart; oder welche, je nachdem die Aufgabe bestimmt, zwei- oder vieldeutig ist, auch das eine, oder die beiden Dreiecke stellt, oder im letzten Fall auf alle die Dreiecke führt, worin die gegebenen Stücke als Elemente angetroffen werden, dergestalt daß L dem Winkel r anliegt, R ihm gegenüber steht.

Auflös. u. Beweis. Man setze an irgend einen Punct a, d, Q u. s. w. eines Normalkreises aQbq, der der Grundkreis heißen mag, einen Normalkreisbogen = L unter dem gegebenen Winkel r und beschreibe aus dem andern Endpuncte P oder s des Bogens L mit einem Halbmesser auf der Sphäre, welcher der zweiten gegebenen Seite R gleich ist, einen Sphärenkreis. Sind nun r und L beide einzeln = 90°, so muß der zweite Endpunct von L der Pol P des Grundkreises werden (§. 9, 7) und der aus P beschriebene Sphärenkreis kann mithin entweder 1) wenn R ≦ 90°, nur ein Parallelkreis des Grundkreises werden (§. 7, 2), oder er muß 2) wenn R = 90°, in allen Puncten mit demselben zusammenfallen (§. 9, 4). Es fehlt mithin außer den beiden Endpuncten der Seite L noch an einem dritten Winkelpunct für ein beabsichtigtes Dreieck. Es ist aber auch, wenn jener 1ste Fall statt findet, die Aufgabe überbestimmt und kein derselben genügendes Dreieck möglich (Kateg. I.), und im 2ten Falle giebt jeder Normalkreisbogen zwischen P und irgend einem Punct des von dem aus P beschriebenen Kreise überall berührten Grundkreises mit r und L ein der ganz unbestimmten Aufgabe entsprechendes Dreieck (vergl. wieder Kateg. I.). — Wenn aber r und L nicht beide zugleich = 90° sind, so muß der andere Endpunct s der Seite L stets vom Pol P des Grundkreises verschieden sein (§. 9, 8), und der aus s Fig. 19.

beschriebene Sphärenkreis kann nun weder ein Parallelkreis des Grundkreises, noch identisch mit demselben werden; dagegen muß aber nothwendig einer der folgenden drei Fälle statt finden:

1) R ist kleiner als der kleinere, oder größer als der größere der beiden von s zum Grundkreise gezogenen Perpendikelbogen sa, sPb, — und dann hat der mit R aus s beschriebene Sphärenkreis gar keinen Punct mit dem Grundkreise gemein (§. 23, 6). Oder:

2) R ist einem von den beiden Perpendikelbogen sa, sPb gleich, und dann berühren sich der aus s beschriebene Sphärenkreis und der Grundkreis in a oder b (§. 23, 6). Oder endlich:

3) R ist größer als der kleinere, kleiner als der größere der beiden Perpendikelbogen sa, sPb, — und dann werden sich der aus s mit R beschriebene Kreis und der Grundkreis in zwei Puncten schneiden (§. 23, 1).

Im ersten Fall ergiebt sich also wieder kein dritter Winkelpunct eines beabsichtigten Dreiecks und es ist in diesem Fall in der That auch kein der überbestimmten Aufgabe genügendes Dreieck möglich (Kateg. II. A, 1 u. 5. B, 1 u. 5. D, 1 u. 4. G, 1 u. 4. — Kateg. III. A, 1 u. 5. B, 1 u. 5. C, 1 u. 5. D, 1 u. 5).

Im zweiten Falle hat man in dem mit dem Endpunct a oder b des Perpendikels = R zusammenfallenden Berührungspunct den dritten Winkelpunct und in sa = R oder sPb = R die zweite Seite des Dreiecks, falls die besondere Beschaffenheit der Data ein solches gestattet. Wenn nehmlich in der Aufgabe, während x = 90° ist, zugleich R = L oder R = 180° — L gegeben werden, so versagt mithin, indem R in L zurück fällt, oder die bloße Verlängerung von L wird, die Construction unter diesen Umständen gleichfalls, der gänzlich überbestimmten Aufgabe gemäß, ein Dreieck schlechthin (Kateg. II. A, 2 u. 4. B, 2 u. 4). Eben so wird, wenn auch bei anderweitiger Bewandniß ein Dreieck aus R, L und r zu Stande kommt, dieses doch unter Umständen, welche die Aufgabe überbestimmt machen, kein wirkliches, sondern nur ein bloßes Afterdreieck sein (Kateg. II. D, 4. G, 1. Kateg. III. Kl. 3. A, 5. B, 5. C, 1. D, 1.) und nur unter Bedingungen, bei welchen die Aufgabe völlig bestimmt ist, denn zweideutig kann sie hier, wo mit einem Berührungspunct auch nur ein R gegeben ist, niemals werden, giebt auch R mit r und L ein völlig bestimmtes, wirkliches Dreieck (Kateg. II. D, 2. G, 3. Kateg. III. Kl. 3. A, 2. B, 2. C, 4. D, 4).

Endlich sind im dritten Falle unter allen dahin gehörigen Umständen die bei-

den von s nach den zwei Durchschnittspuncten gezogenen Normalkreisbogen die einzig möglichen zur Auflösung der Aufgabe anwendbaren R (§. 30, 19). Ein jedes dieser beiden R, oder wenigstens das eine derselben, falls das andere mit L oder dessen Verlängerung zusammenfällt, giebt mit r und L ein Dreieck; aber die dergestalt gebildeten Dreiecke sind, so oft die Aufgabe überbestimmt ist, nur Afterdreiecke (Kateg. II. D, 4. G, 1. Kateg. III. Kl. 1. B. C. Kateg. III. Kl. 2. A. D. Kateg. III Kl. 3. A, 5. B, 5. C, 1. D, 1); wenn die Aufgabe zweideutig ist, so sind sie auch zwei wirkliche, völlig verschiedene, beiderseits den Forderungen der Aufgabe Genüge leistende Dreiecke (Kateg. II. D, 3. G, 2. Kateg. III. Kl. 3. A, 3. B, 3. C, 3. D, 3.); endlich, wenn die Aufgabe wirklich bestimmt ist, so giebt auch immer nur das eine der beiden R ein ihr entsprechendes, wirkliches Dreieck, während das zweite R nur ein Afterdreieck, oder indem es mit L oder dessen Verlängerung zusammenfällt, gar kein Dreieck mit r und L bildet (Kateg. I. B. Kateg. II. A, 3. B, 3. C. E. F. H. Kateg. III. Kl. 1. A. D. Kl. 2. B. C. Kl. 3. A, 4. B, 4. C, 2. D, 2.).

Das sechste Kriterium der Identität sphärischer Dreiecke.

§. 39.

1. Wenn zwei sphärische Winkel und ein Normalkreisbogen als Elemente eines sphär. Dreiecks den zur Natur des letzteren gehörigen allgemeinen Bedingungen entsprechend, d. h. sämmtlich einzeln kleiner als 180° gegeben sind (§. 18.), so ist unfehlbar ein völlig bestimmtes Dreieck mit ihnen gesetzt, sofern darin beide gegebene Winkel der gegebenen Seite anliegen (§. 20.); wenn aber nur der eine Winkel der Seite anliegen, der andere ihr gegenüber stehen soll, so ist nicht immer, sondern nur unter gewissen Nebenbestimmungen ein und eben dasselbe Dreieck mit den gegebenen Elementen gesetzt, unter andern Umständen können aus denselben auch zwei oder selbst unendlich viel Dreiecke construirt werden, oder es ist auch die Construction eines wirklichen Dreiecks aus den Datis völlig unmöglich. Der Beweis dieses Satzes wird durch die folgende, alle mögliche Fälle erschöpfende Darstellung geführt, bei welcher durchgehends die gegebene Seite mit L, der ihr anliegende Winkel mit r, der ihr gegenüberstehende mit l und überdies noch die dem Winkel r gegenüberliegende Seite mit R bezeichnet wird.

I. Untersuchung der Fälle, in denen zwei oder alle drei gegebenen Elemente einzeln $= 90°$ sind.

A. Wenn L und r beide einzeln $= 90°$ sind, so muß auch $l = 90°$ sein (§. 29, 2). So oft nun wirklich $l = 90°$ gegeben, so ist auch $R = 90°$; aber die dritte Seite und ihr Gegenwinkel können jede Größe unter 180° haben (§. 29, 4), und die Aufgabe ist mithin vieldeutig, so oft hingegen $l \gtrless 90°$ gegeben, so ist die Aufgabe überbestimmt.

B. Wenn L und l beide einzeln $= 90°$ gegeben sind, so ist nicht nothwendig auch $r = 90°$ (§. 29, 3). So oft nun wirklich auch $r = 90°$ gegeben, so ist die Aufgabe vieldeutig (§. 29, 4), — so oft dagegen $r \gtrless 90°$ gegeben ist, so ist an Graden $R = r$ und die dritte Seite und deren Gegenwinkel beide $= 90°$ (§. 29, 4), folglich in diesem Fall bei der absolut bestimmten Größe jedes Elements auch die Aufgabe völlig bestimmt.

C. Wenn r und l beide einzeln $= 90°$ sind, so muß auch $L = 90°$ sein (§. 29, 1), und so oft also wirklich auch $L = 90°$ gegeben, so ist nach §. 29, 4 die Aufgabe vieldeutig, — so oft hingegen $L \gtrless 90°$ verlangt wird, so ist die Aufgabe überbestimmt.

II. Untersuchung der Fälle, in welchen nur eins unter den gegebenen Elementen $= 90°$ ist.

Der Durchschnittspunct der Seiten L und R kann hier niemals der Pol der dritten Seite werden (§. 9, 8), er kann daher überall durch s in Fig. 19. vorgestellt werden und es finden die Resultate des 30sten Sphen, auf den sich alle folgenden, ohne Vorzahl angemerkten Citate beziehen, für die hier erforderlichen Entscheidungen vollständige Anwendung.

A. Wenn $L = 90° = sQ$ und $r > 90° = sQb$ und es ist

1) l größer als r, oder

2) $l = r$, so ist die Aufgabe überbestimmt (23).

3) l kleiner als r und größer als das Supplement von r, so ist die Aufgabe bestimmt und $R > 90$.

Denn ein solches l findet in jedem der vier Quadranten aQ, bQ, aq, bq einmal statt (34) und kann eben sowohl stumpf als spitz sein. Ist es stumpf, also dem größern Perpendikelbogen sb entgegen stehend (21), wie z. B. $l = sdQ = sfb = shq = sgb$, so können offenbar die beiden mit r auf gleicher Seite des Perpendikels liegende l, eben dieser Lage wegen mit L und r gar nicht in einem Dreiecke zusammen vorkommen; von den beiden andern l liegt offenbar immer das eine, shq mit L und r nur in einem ungültigen Afterdreiecke sQbh und allein das noch übrige $l = sgb$ giebt unbedenklich das wirkliche Dreieck sQg, worin $sg = R > 90°$ (7). Ist l spitz, also dem kleinern Perpendikelbogen sa gegenüber liegend, wie z. B. $l = sha = sgq = sda = sfQ$, so übersieht es sich sogleich, daß wieder nur das eine sfQ an einem $R > 90°$ liegend mit L und r ein wirkliches Dreieck sQf geben könne. Also ist in jedem Fall nur ein einziges Dreieck bestimmt und darin $R > 90°$.

4) l kleiner als r und dem Supplement von r gleich, oder

5) l kleiner als r und kleiner als das Supplement von r, so ist die Aufgabe überbestimmt (23).

B. Wenn $L = 90° = sQ$ und $r < 90° = sQa$ und es ist

1) l größer als r und größer als das Supplement von r, oder

2) l größer als r und gleich dem Supplement von r, so ist die Aufgabe überbestimmt (23).

3) l größer als r und kleiner als das Supplement von r, so ist die Aufgabe bestimmt und $R<90°$. (Aus gleichen Gründen, wie in A, 3).

4) $l=r$ oder 5) l kleiner als r macht die Aufgabe überbestimmt (23).

C. Wenn $L>90°=sf$ und auch $r>90°=sfb$, also der Kateg. zufolge $l=90°$, so ist die Aufgabe bestimmt und $R>90°$.

D. Wenn $L>90°=sb$ und $r=90°=sbQ$ und es ist

1) l an Graden größer als L, so ist die Aufgabe überbestimmt (34).

2) l an Graden gleich L, so ist die Aufgabe bestimmt und $R=90°$ (24).

3) l an Graden kleiner als L und größer als 90°, so ist die Aufgabe zweideutig und in den beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch.

Denn ein $l<L$ d. h. $l<sb$ und größer als 90°, also um so mehr auch größer als sa findet viermal am Grundkreise statt: zweimal mit r auf derselben und zweimal auf der entgegengesetzten Seite des Perpendikels (34). Da es der Seite sb opponirt ist (22), so ist klar, daß von den beiden jenseitigen l keins mit L und r in einem Dreiecke vorkommen kann; dagegen giebt offenbar jedes diesseitige, wie z. B. $l=sfb=sdQ$ ein wirkliches Dreieck sbf, sbd und wegen $dQ=fQ$ (30), hat man $sd+sf=180°$ (14), oder die Seiten R in beiden Dreiecken supplementarisch.

4) l an Graden kleiner als L und kleiner als 90°, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn wenn $l<L$ auch kleiner als sa ist, so ist die Behauptung klar (34); ist $l=sa$, so giebt es nur ein Afterdreieck (24); ist es größer als sa, so giebt es, weil seine Oeffnung gegen sa gerichtet (21), gleichfalls offenbar nur Afterdreiecke.

E. Wenn $L>90°=sf$ und $r<90°=sfQ$, also der Kateg. gemäß $l=90°$, so ist so wie in C die Aufgabe bestimmt und $R<90°$.

F. Wenn $L<90°=sd$ und $r>90°=sdQ$ und mithin verm. d. Kateg. $l=90°$, so ist, wie in C und E die Aufgabe bestimmt und $R>90°$.

G. Wenn $L<90°=sa$ und $r=90°=saQ$ und es ist

1) l an Graden größer als L und zugleich größer als 90°, so ist die Aufgabe überbestimmt (aus ganz ähnlichen Schlüssen wie in D, 4).

2) l an Graden größer als L und kleiner als 90°, so ist die Aufgabe zweideutig

und in den beiden möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch. (Nach ähnlichen Schlüssen wie in D, 3).

3) l an Graden gleich L, so ist die Aufgabe bestimmt und R=90° (wie in D, 2).

4) l an Graden kleiner als L macht die Aufgabe überbestimmt (34).

H. Wenn L<90°=sd und auch r<90°=sdα und folglich d. Kateg. entspr. l=90°, so ist die Aufgabe bestimmt und R<90° (wie in C, E und F).

III. Untersuchung der Fälle, in denen kein einziges der gegebenen Elemente = 90° ist.

In dieser Kategorie muß aus gleichen Gründen wie in der vorhergehenden der Durchschnittspunct s der Seiten L und R jedesmal vom Pol P des Grundkreises verschieden sein und die Schlüsse des 30sten Sphen finden hier wie dort überall Anwendung. Alle hieher gehörigen Fälle werden übrigens wieder in drei Classen getheilt: in der 1sten sind r und l gleich, also unsupplementarisch, in der 2ten sind r und l ungleich, aber supplementarisch; zur 3ten Classe gehören endlich alle Fälle, in denen r und l ungleich und unsupplementarisch sind.

1ste Classe. r und l sind gleich.

A. Wenn L>90°=sf und auch r>90°=sfb, so ist die Aufgabe bestimmt.

Denn von den drei andern möglichen l=r=sdQ=shq=sgb (34) kommt offenbar nur das eine sgb mit L und r in einem wirklichen Dreiecke sfg vor.

B. Wenn L>90°=sf und r<90°=sfQ, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn von den drei allein noch möglichen l=r=sdα=sha=sgq (34) geben die ersteren gar kein, das letztere nur ein Asterdreieck.

C. Wenn L<90°=sd und r>90°=sdQ, so ist, wie in B, die Aufgabe überbestimmt.

D. Wenn L<90°=sd und auch r<90°=sdα, so ist, wie in A, die Aufgabe bestimmt.

2te Classe. r und l sind ungleich aber supplementarisch.

A. Wenn L>90°=sf und auch r>90°=sfb, so ist d. Aufgabe überbestimmt.

Denn von den vier möglichen l (34), liegen zwei unmittelbar an L und dessen Verlängerung; das dritte l=sgq giebt eben so wenig mit L und r ein Dreieck (21), und das vierte, sda kann offenbar nur ein Asterdreieck sfbqad geben.

B. Wenn L>90°=sf und r<90°=sfQ, so ist die Aufgabe bestimmt.

Denn von den vier möglichen l=sfb=shq=sgb=sdQ (34), können, wie ohne weiteres klar ist, die drei ersten mit L und r kein Dreieck geben; eben so begreiflich aber muß das letzte allemal ein wirkliches Dreieck sfd geben (21.)

C. Wenn $L < 90° = sd$ und $r > 90° = sdQ$, so ist, wie vorhin in B, die Aufgabe bestimmt.

D. Wenn $L < 90° = sd$ und auch $r < 90° = sda$, so ist, wie in A, die Aufgabe überbestimmt.

3te Classe. r und l sind ungleich und unsupplementarisch.

A. Wenn $L > 90° = sf$ und $r > 90° = sfb$ und es ist

1) l (größer als r) an Graden größer als der dem gegebenen r opponirte größere Perpendikelbogen sb, so ist die Aufgabe überbestimmt (23).

2) l (größer als r) an Graden gleich dem größeren Perpendikelbogen sb, so ist die Aufgabe bestimmt und $R = 90°$ (24).

3) l größer als r und an Graden kleiner als jener größere Perpendikelbogen sb, so ist die Aufgabe zweideutig und in beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch.

Denn da l an Graden größer als der kleinere Perpendikelbogen sa sein muß, weil es schon größer als der stumpfe Winkel r ist, und da es zugleich kleiner als der größere Perpendikelbogen sb ist, so kommt es in jedem der vier Quadranten aQ, bQ, bq, aq einmal vor (34); da es dem größern Perpendikelbogen sb zugekehrt ist (21), so ist es offenbar in den Quadranten aQ, bQ für den Zweck der Construction unbrauchbar; im Quadranten bq giebt es, wie z. B. $l = sxb$, unbedenklich ein wirkliches Dreieck sfx; aber auch im letzten Quadranten aq, wird es allemal, wie $l = stb$ mit L und r in einem wirklichen Dreiecke sft liegen; denn da es größer als r also auch größer als dessen Polarwinkel shq ist (§. 11, 11), mithin zwischen sh und sq fällt (28), und da der Bogen $fqh = 180°$, so ist fbt, gleich den Seiten L und R in jenem Dreiecke, kleiner als 180°, und dieses also ein wirkliches, kein Afterdreieck. Da übrigens $tq = rq$ (30), also auch $sr + st = 180°$ (14), so sind zugleich in beiden dergestalt möglichen Dreiecken die Seiten R supplementarisch.

4) l kleiner als r und zugleich größer als das Supplement von r, so ist die Aufgabe bestimmt und $R > 90°$.

Denn ein solches l kommt in jedem der vier Quadranten des Grundkreises aus schon bekannten Gründen einmal vor (34), es mag stumpf oder spitz sein. Ist es stumpf, so giebt es, nicht mehr, wie vorhin, im Quadranten aq, ein wirkliches Dreieck, da es, kleiner als r und dessen Polarwinkel shq, nunmehr zwischen sh und sa fällt (28), und mit L und r folglich nur in einem Afterdreiecke vorkommt, so daß es allein in dem Quadranten bq, wie $l = sub$, ein wirk-

wirkliches Dreieck sfu bestimmt, worin su=R>90°. — Ist l spitz, also dem kleinern Perpendikelbogen sa opponirt (21), so ist es dieser Lage zufolge offenbar in den beiden jenseitigen Quadranten bq, aq für die Absicht der Construction unbrauchbar, das im Quadranten aQ befindliche l giebt unbedenklich nur ein Afterdreieck; im Quadranten bQ aber, liegt es, weil es größer als sfQ ist, zwischen sf und sb (26) und giebt folglich, wie z. B. l=soQ, hier immer ein wirkliches Dreieck sfo, worin so=R>90°. — Also ist in jedem Fall immer nur ein Dreieck bestimmt und in demselben stets R>90° (7).

5) l kleiner als r und auch kleiner als das Supplement von r, so ist die Aufgabe überbestimmt

Denn wenn ein solches l an Graden vollends kleiner als sa ist, so ist die Construction schlechthin unmöglich (23); ist es eben so groß, so kommt es nur in q und Q, dort ganz überflüssig, hier nur in einem Afterdreiecke mit L und r vor; ist es größer als sa, so ist es doch, als ein der Voraussetzung nach spitzer Winkel, dem Bogen sa opponirt (21) und daher in den Quadranten bq, aq unbrauchbar; in aQ giebt es nur ein Afterdreieck und, weil es kleiner als sfQ, also zwischen sf und sQ fällt (26), auch in bQ.

B. Wenn L>90°=sf und r<90°=sfQ und es ist

1) l (größer als r) an Graden größer als der größere Perpendikelbogen sb, so ist die Aufgabe überbestimmt (25).

2) l (größer als r) an Graden gleich dem Bogen sh, so ist die Aufgabe bestimmt und R=90° (24).

3) l größer als r und an Graden kleiner als der größere Perpendikelbogen sb, aber zugleich größer als das Supplement von r, so ist die Aufgabe zweideutig, und in beiden zugleich möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch.

Denn von den vier wirklich am Grundkreise vorkommenden l (34), sind, da alle dem Bogen ab entgegen stehen (21), die in den Quadranten aq, bq befindlichen, offenbar ganz unnütz für die Absicht der Construction. Das in uQ, wie z. B. l=snQ kommt ohne Zweifel mit L und r in ein wirkliches Dreieck sfn zusammen, eben so aber muß auch das in bQ statt findende l=smf, da es größer als sfb, mithin zwischen sf und sQ liegt (28), jedesmal noch ein zweites wirkliches Dreieck sfm geben; und wegen nQ=mQ (30), ist zugleich sn+sm=180° (14), d. h. in beiden möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch.

4) l größer als r und kleiner als das Supplement von r, so ist die Aufgabe bestimmt und R<90°.

Denn wenn l noch stumpf ist, so ist alles wie eben vorhin, nur mit dem Unterschiede, daß es jetzt nicht mehr in bQ (28), sondern allein nur noch in aQ ein wirkliches Dreieck bestimmen kann, wo $R<90°$. Ist l spitz, also dem Bogen sa gegenüber liegend (21), so ist es in aQ und bQ nutzlos, in bq unbedenklich nur zu einem Afterdreiecke brauchbar; in aq aber fällt es, da es größer als r, also auch größer als dessen Polarwinkel sha ist, zwischen sh und sa (26) und bestimmt daher hier, wie z. B. l=sia ein wirkliches Dreieck sfai, indem der Bogen fah=180°, also die Seite fai<180° ist. Zugleich ist auch hier si=R<90° (6).

5) l kleiner als r, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn ist l auch kleiner als sa, so ist es am Grundkreise ganz unmöglich (23); ist es so groß oder auch größer als sa, so sind verm. S. 21, 24 und 26 überall doch nur höchstens Afterdreiecke möglich.

C. Wenn L<90°=sd und r>90°=sdQ und es ist

1) l größer als r, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn ist l auch an Graden größer als sb, so ist die Behauptung klar (23); ist es eben so groß als sb, so erhellt sie gleichfalls aus S. 24; ist es kleiner als sb, so ist es doch, dem Bogen sb gegenüberliegend (21), in aQ und bQ gar nicht, in aq nur für ein Afterdreieck brauchbar; desgleichen liegt es, weil es größer als sgb, der Polarwinkel von r, zwischen sg und sq (28), und giebt daher auch in bq nichts als ein Afterdreieck.

2) l kleiner als r und größer als das Supplement von r, so ist die Aufgabe bestimmt und R>90°.

Denn wenn l noch stumpf ist, so ist alles wie eben vorher; nur in bq fällt es jetzt zwischen sg und sb (28), und giebt daher hier ein wirkliches Dreieck, worin R>90°. — Ist l spitz, also dem Bogen sa entgegen stehend (21), so ist es eben darum in den Quadranten aq, bq unbrauchbar; in aQ, weil es größer als sda, fällt es zwischen sd und sa (26) und giebt ein alle übrigen Quadranten umfassendes Afterdreieck; nur in bQ bestimmt es also unbedenklich ein wirkliches Dreieck, worin R>90° sein muß (7).

3) l kleiner als r und kleiner als das Supplement von r, aber noch an Graden größer als der kleinere Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe zweideutig und in beiden möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch.

Denn es ist wie so eben zuvor, nur daß l jetzt auch in aQ, da es kleiner als sda, also zwischen sd und sQ fällt (26), ein wirkliches Dreieck bestimmt; es

sind also zwei Dreiecke, wie z. B. sdm und sdn zugleich möglich, in denen, wegen nQ = mQ (30) immer an + am = 180° (14), d. h. die Seiten R supplementarisch sind.

4) l (kleiner als r) an Graden gleich dem Perpendikelbogen sa macht die Aufgabe bestimmt, und es ist R = 90° (24).

5) l (kleiner als r) an Graden kleiner als sa macht die Aufgabe überbestimmt (23).

D. Wenn L < 90° = sd und auch r < 90° = sda und es ist

1) l größer als r und auch größer als das Supplement von r, so ist die Aufgabe überbestimmt.

Denn ist l auch größer als sb, so ist die Behauptung aus S. 23 gewiß; ist l = sb, so erhellt sie aus S. 24; ist es kleiner als der Bogen sb, so ist es, ihm gegenüberliegend (21), in den Quadranten aq, bq unbrauchbar; in bQ erzeugt es nur ein Afterdreieck, in aQ, weil es größer als sdQ, also zwischen sd und sQ liegt (28), gleichfalls.

2) l größer als r, aber kleiner als das Supplement von r, so ist die Aufgabe bestimmt und R < 90°.

Denn ein stumpfes l verhält sich wie das so eben betrachtete, nur daß es in aQ jetzt zwischen sd und sa fällt (28), also ein wirkliches Dreieck, z. B. sde, worin R < 90° (6), bestimmt. Ist l spitz, so ist es in aQ und bQ nutzlos (21), in bq fällt es, da es zugleich größer als des gegebenen r Polarwinkel sgq ist, zwischen sg und sb (26), also nur für ein Afterdreieck brauchbar und allein im vierten Quadranten bestimmt es also ein wirkliches Dreieck, in welchem zugleich R < 90° (6).

3) l kleiner als r aber noch größer an Graden als der Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe zweideutig und in beiden möglichen Dreiecken sind die Seiten R supplementarisch.

Denn jetzt fällt das nur so eben vorher betrachtete spitze l im Quadranten bq zwischen sg und sq (26) und bestimmt daher auch hier ein wirkliches Dreieck. In beiden Dreiecken, wie z. B. sdt, sdr, sind bekanntlich verm. S. 14 und 30, die Seiten R supplementarisch.

4) l (kleiner als r) an Graden gleich dem kleinern Perpendikelbogen sa, so ist die Aufgabe bestimmt und R = 90° (24).

5) l (kleiner als r) an Graden kleiner als sa macht die Aufgabe überbestimmt (23).

2. Die obigen Entwickelungen geben also, da sie für alle Umstände berechnet sind, welche bei der Bestimmung eines sphärischen Dreiecks aus den Elementen L, r und l vorkommen können, in jedem einzelnen Fall bestimmte Auskunft, ob die Data entweder gar kein Dreieck, oder ein einziges, oder zwei oder mehr Dreiecke zulassen. Ist übrigens aus anderweitigen Gründen die absolute Unmöglichkeit eines Dreiecks zum voraus beseitigt, so werden die Resultate, welche demnächst nur noch zur Entscheidung darüber, ob die Aufgabe bestimmt, zwei- oder vieldeutig sei, zu Rathe gezogen werden, eben so wie beim fünften Kriterium (§. 38, 2), dadurch zu größerer Einfachheit modificirt, daß sich aus ihnen diejenigen Bestimmungen, welche allein die Möglichkeit des Dreiecks sicher stellen, jetzt als völlig überflüssig von selbst ausscheiden. Da diese Modification der a. a. O. bereits vorgenommenen, vollkommen ähnlich ist, so bedarf es hier keiner so umständlichen Ausführung des einzelnen mehr, und es wird schon vollkommen zulänglich sein, die kurzen Resultate größtentheils nur mit der bestimmten Nachweisung der übrigen Fälle, aus deren Vergleichung sie unter der ein für allemal gültigen Voraussetzung, daß die Aufgabe nicht überbestimmt sei, in größerer Einfachheit hervorgehen, hier aufzuführen.

Unter den Fällen, in welchen durch die Data ein einziges Dreieck bestimmt ist, nimmt zuerst der unter Kateg. II. A, 3 betrachtete, wenn man nach der Reihe die Bestimmungen in A, 4; A, 5; A, 1 und 2 damit vergleicht, die folgende Gestalt an:

Wenn $L=90°$, $r>90°$, $l \gtrless 90°$: so ist die Aufgabe bestimmt und $R>90°$. Gleiche Vereinfachung erleidet Kateg. II. B, 3.

Ferner wird in der 3ten Klasse der Kateg. III. aus A, 4 in Vergleich mit A, 5 und B, 5 folgende Regel erhalten:

Wenn $L>90°$ und $l<r$: so ist die Aufgabe bestimmt und $R>90°$.

Das Resultat B, 4 mit B, 5 verglichen giebt die Regel:

Wenn $L>90°$, $r<90°$ und $l<180°-r$: so ist die Aufgabe bestimmt und $R<90°$. — Eben so ändert sich auch C, 2 in Vergleich mit C, 1 und so wie A, 4 modificirt sich auch D, 2 mit D, 1 und C, 1 verglichen.

Unter den Fällen, die mehr als ein Dreieck bestimmen, geht aus der Bestimmung Kateg. II. D, 3 mit Bezug auf D, 4, 1. und 2 die folgende hervor: wenn $L>90°$, $r=90°$ und l an Graden ungleich L: so ist die Aufgabe zweideutig. — Eben so verhält es sich mit G, 2. — Ferner ändert sich in der 3ten Classe der

Anleg. III. den Fall A, 3 mit A, 1 und 2 vergleichen; dahin aber wenn $L > 90°$, $1 > 90°$ und $1 > r$: so ist die Aufgabe zweideutig. — Aus B, 3 mit B, 1, 2 und 5 zusammen gehalten ergiebt sich die Regel: wenn $L > 90°$, $r < 90°$ und $1 > 180° - r$: so ist die Aufgabe zweideutig. — So wie hier B, 3 wird auch C, 3 und so wie vorhin A, 3 wird auch D, 3 modificirt.

Jn dieser einfacheren Gestalt sind nun die Resultate zugleich mit der Angabe der jedesmaligen Art der Seite R in den bestimmten Fällen durch die beiden folgenden Abtheilungen dieses Sphen zur Uebersicht gestellt.

6. Durch die Elemente L, r, l ist ein einziges Dreieck bestimmt, vorausgesetzt, daß die Construction eines wirklichen Dreiecks nicht schlechthin unmöglich ist.

I. Sofern mehr als eins der gegebenen Elemente $= 90°$ sind:

1) wenn $L = 90°$, $r \gtrless 90°$, $l = 90°$. R an Graden $= r$.

II. Sofern nur eins der gegebenen Elemente $= 90°$ ist:

2) wenn $L = 90°$, $r > 90°$, $l \gtrless 90°$. $R > 90°$.
3) $L = 90°$, $r < 90°$, $l \gtrless 90°$. $R < 90°$.
4) $L > 90°$, $r > 90°$, $l = 90°$. $R > 90°$.
5) $L > 90°$, $r = 90°$, l an Graden $= L$. $R = 90°$.
6) $L > 90°$, $r < 90°$, $l = 90°$. $R < 90°$.
7) $L < 90°$, $r > 90°$, $l = 90°$. $R > 90°$.
8) $L < 90°$, $r = 90°$, l an Graden $= L$. $R = 90°$.
9) $L < 90°$, $r < 90°$, $l = 90°$. $R < 90°$.

III. Sofern keins der gegebenen Elemente $= 90°$, und

1stens die gegebenen Winkel r und l gleich sind:

10) wenn $L > 90°$, $r > 90°$, $l = r$. $R > 90°$.
11) $L < 90°$, $r < 90°$, $l = r$. $R < 90°$.

2tens die gegebenen Winkel r u. l ungleich aber supplementarisch:

12) wenn $L > 90°$, $r < 90°$, $l = 180° - r$. $R < 90°$.
13) $L < 90°$, $r > 90°$, $l = 180° - r$. $R > 90°$.

3tens d. gegeb. Winkel r u. l ungleich und unsupplementar. und zwar

a) falls l an Graden so groß als der demselben opponirte Perpendikelbogen:

14) wenn $L > 90°$, $r > 90°$, $l > 90°$. $R = 90°$.
15) $L > 90°$, $r < 90°$, $l > 90°$. $R = 90°$.
16) $L < 90°$, $r > 90°$, $l < 90°$. $R = 90°$.
17) $L < 90°$, $r < 90°$, $l < 90°$. $R = 90°$.

um das Maß des Winkels l entfernt ist, daß sodann ein aus dem Berührungs- oder Durchschnittspuncte über dem Grundkreise beschriebener Halbnormalkreis nicht nur durch den zweiten Endpunct P oder s des Bogens L hindurch gehen, sondern auch mit dem Grundkreise zwei Polarwinkel bilden müsse, deren jeder dem gegebenen Winkel l gleich ist; vermöge §. 11, 15.

Sind nun r und L beide einzeln $=90°$, so muß der andere Endpunct des Bogens L mit dem Pol P des Grundkreises (§. 9, 7), folglich auch der Hülfskreis mit dem Grundkreise identisch werden und der Entscheidungskreis muß demnächst auch, ohne den Hülfskreis zu schneiden, entweder 1) wenn l und also auch dessen Maß kleiner oder größer als 90°, nur ein Parallelkreis von jenem werden (§. 7, 2), oder 2) wenn l und dessen Maß $=90°$, in allen Puncten mit ihm zusammenfallen (§. 7, 2). Es findet also im 1sten Falle zwischen dem Hülfs- und Entscheidungskreise gar kein gemeinschaftlicher Punct statt, aus dem, als zugehörigem Pol, der gesuchte Normalkreis beschrieben werden könnte; es ist aber auch in demselben Fall gar kein der überbestimmten Aufgabe genügendes Dreieck möglich (Kateg. I.). Im 2ten Fall hingegen haben der Hülfskreis und der mit ihm identisch gewordene Entscheidungskreis unzählig viel Berührungspuncte und in der That sind dann auch unendlich viel der ganz unbestimmten Aufgabe entsprechende Dreiecke möglich (Kateg. I.), indem ein jeder Halbnormalkreis, der aus irgend einem Puncte des Hülfs- oder mit ihm identischen Grundkreises über letzterem beschrieben wird, rechte Winkel mit demselben bildet (§. 11, 15).

Wenn nun ferner aber r und L nicht beide zugleich einzeln $=90°$ sind, daß entweder nur einer von beiden oder keiner $=90°$, so muß der Endpunct s des Bogens L stets vom Pol P des Grundkreises (§. 9, 8), folglich auch der aus s beschriebene Hülfskreis qwQv stets vom Grundkreise selber verschieden sein und man hat, wenn w und v die beiden Durchschnittspuncte des Hülfskreises und des durch s auf den Grundkreis gezogenen Perpendikels wa, Pb sind, $sa + sP = Pv + sP = 90°$ (§. 9, 4), folglich Pw = dem kleineren Perpendikelbogen sa; desgleichen $sPb + sa$ oder $sPb + Pw = Psav + Pw = 180°$ (§. 6, 6), folglich Psav = dem größeren Perpendikelbogen sPb. Zugleich kann, weil P und s verschieden sind, der Entscheidungskreis jetzt in keinem Falle von dem Hülfskreise weder ein Parallelkreis noch identisch mit demselben werden. Es sind nun aber folgende drei Fälle möglich:

1) Der Winkel l und also auch dessen Maß ist an Graden entweder kleiner als

sa, folglich auch kleiner als Pw; oder größer als sPb, folglich auch größer als Psav, und dann hat mithin weder das eine noch das anderemal der Entscheidungskreis irgend einen Punct mit dem Hülfskreise gemein. Vermöge §. 23, 6.

2) l und sein Maß ist an Graden entweder gleich sa, folglich auch gleich Pw; oder gleich sPb, folglich auch gleich Psav, und dann berühren sich der Entscheidungs- und Hülfskreis in w oder v. Verm. §. 23, 6.

3) l und sein Maß ist an Graden größer als sa, also auch größer als Pw und zugleich kleiner als sPb, folglich auch kleiner als Psav und dann müssen der Entscheidungs- und Hülfskreis sich in zwei Puncten durchschneiden. Verm. §. 23, 1.

Im 1sten Falle versagt also die Construction den Punct, aus welchem, als zugehörigen Pol der gesuchte Halbnormalkreis beschrieben werden muß und dies ist auch völlig consequent der in diesem Fall überbestimmten Aufgabe, welcher gar kein Dreieck entsprechen kann. (Kateg. II. A, 1 und 5. B, 1 und 5. D, 1 und 4. G, 1 und 4. Kateg. III. Kl. 3. A, 1 und 5. B, 1 und 5. C, 1 und 5. D, 1 und 5.)

Im 2ten Fall ist der Berührungspunct w oder v der gesuchte und durch die Construction gegebene Pol des Halbnormalkreises qsQ, der mit dem Grundkreise in q und Q zwei spitze, dem kleinern Bogen sa und zwei stumpfe, dem größeren Perpendikelbogen sPb an Graden gleiche Winkel bildet (§. 11, 15). Diese beiden, der einen oder andern Forderung genügende Winkel sind als solche die einzigen, welche von einem durch s gehenden Halbnormalkreise mit dem Grundkreise, auf der nehmlichen Seite desselben, auf welcher L sich befindet, gebildet werden können (§. 30, 24). Die Construction wird also, ungeachtet sie das verlangte l selbst zweimal giebt, dennoch unter allen Umständen, bei welchen nach den Entwickelungen im 1sten Abschnitt dieses Sphen die Aufgabe überbestimmt ist, das Dreieck selbst versagen, indem entweder, wenn, während L=90°, l=r oder l=180°—r bedungen, dieses l in r zurück fällt oder bloß dem verlängerten L anliegt (Kateg. II. A, 2 und 4. B, 4 und 2); oder, wenn auch bei anderweitiger Bewandniß l mit r und L wirklich in einem Dreieck vorkommt, so ist dieses doch unter den Umständen, welche die Aufgabe überbestimmt machen, nur ein Afterdreieck (Kateg. II. D, 4. G, 1. Kateg. III. Kl. 3. A, 5. B, 5. C, 1. D, 1.), und allein unter Bedingungen, bei welchen die Aufgabe bestimmt ist, (denn zweideutige Aufgaben sind hier, wie die obige Deduction in 1 und die Sache sogleich selbst ergiebt, nicht möglich), wird auch l mit L und r zusammen in einem einzigen den Forderungen gemäßen wirklichen Dreiecke sich darstellen (Kateg. II. D, 2. G, 3. Kateg. III. Kl. 3. A, 2. B, 2. C, 4. D, 4.).

Endlich sind im 3ten Fall, wo der Entscheidungs- und Hülfskreis sich schneiden, mit den beiden Durchschnittspuncten zwei Pole bestimmt, aus deren jedem ein durch s gehender Halbnormalkreis über dem Grundkreise beschrieben wird, der mit letzterem zwei dem gegebenen l gleiche Winkel bildet (§. 11, 15). Außer den vier l, welche sonach über dem Grundkreise erhalten werden, ist an ihm, auf derselben Seite wo L liegt, kein fünftes von einem durch s gehenden Normalkreise gebildetes l mehr möglich (§. 50, 34), und die Construction wird also unter denselben Umständen, bei welchen nach der Deduction in S. 1. die Aufgabe überbestimmt, zweideutig oder bestimmt ist, nothwendig auch gar kein wirkliches Dreieck, oder zwei oder nur ein einziges stellen. Von den vier l sind nehmlich immer zwei, ihrer Lage zufolge für den Zweck der Construction ganz unbrauchbar, wie dieses in den obigen Entwickelungen in S. 1, vollständig erörtert ist; von den beiden andern l giebt ein jedes, oder wenigstens das eine, falls das andere an der Rückseite von L oder an dessen Verlängerung liegt, mit L und r ein Dreieck; aber die so erhaltenen Dreiecke sind 1) so oft die Aufgabe überbestimmt ist, nur Afterdreiecke (Kateg. II. D, 4. G, 1. Kateg. III. Kl. 1. B. C. Kateg. III. Kl. 2. A. D Kateg. III. Kl. 3. A, 5. B, 5. C, 1. D, 1.). 2) Wenn die Aufgabe zweideutig ist, so entstehen auch zwei völlig verschiedene, beiderseits den Forderungen entsprechende wirkliche Dreiecke (Kateg. II. D, 3. G, 2. Kateg. III. Kl. 3. A, 3. B, 3. C, 5. D, 3.); endlich 3) so oft die Aufgabe völlig bestimmt ist, kommt auch nur das eine l mit L und r in einem ihr gemäßen wirklichen Dreiecke vor, während das zweite l entweder nur einem Afterdreiecke, oder, wenn es an L oder dessen Verlängerung liegt, gar keinem Dreiecke sich einfügt. (Kateg. I. B. Kateg. II. A, 3. D, 3. C. E. F. H. Kateg. III. Kl. 1. A. D. Kl. 2. B. C. Kl. 3. A, 4. B, 4. C, 2. D, 2.).

Anmerk. Man hätte begreiflich statt der eben durchgeführten Auflösung eine andere, so wie überhaupt auch statt der ganzen im 1sten Abschnitt dieses Syhen gegebenen Deduction eine andere auf der Theorie des Polardreiecks (§. 17.) begründete aus §. 37. ableiten können; auch sind, wie sich alsbald zeigt, die Fälle im 1sten Abschnitt dieses Syhen in einer solchen Ordnung aufgeführt, daß jeder einzelne die Verhältnisse des Polardreiecks für den gleichzähligen Fall in §. 37. darstellt. Allein außer dem, daß eine solche Entwickelung vermittelter und weniger anschaulich, als die hier befolgte, gewesen wäre, würde sie auch, um vollständige Evidenz zu gewähren, eine Erweiterung und Uebertragung des früheren Theorems vom Polardreieck auf das uneigentliche oder Afterdreieck erfordert haben, welche bei der hier gewählten Darstellung füglich ganz unberührt bleiben konnte.

Vergleichung des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks mit der ganzen Kugelfläche.

§. 40.

1. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie der Ueberschuß der Winkelsumme des Dreiecks über zwei rechte Winkel sich zu acht rechten Winkeln verhält; oder, wenn die Fläche des Dreiecks durch D, die Kugelfläche durch S und die Winkel des Dreiecks durch a, b, d bezeichnet werden, so ist $D : S = (a+b+d-2R) : 8R$.

Denn es sei abd das verglichene Dreieck, dessen Seiten zu vollständigen Normalkreisen verlängert, das dem Dreieck abd gleiche Gegendreieck $\alpha\beta\delta$ und die übrigen sechs Nebendreiecke desselben geben, (§. 16, 1 und 4) so hat man: Fig. 6.

Dreieck abd + Nebendreieck $ab\delta$ = dem Zweiecke $di\delta kd = \frac{d}{4R} . S$ (§. 13, 6)

Dreieck abd + Nebendreieck $ad\beta$ = d. Zweiecke $bh\beta gb = \frac{b}{4R} . S$

Dreieck abd + Nebendreieck $a\beta\delta$ = d. Gegendreieck $\alpha\beta\delta$

+ Nebendreieck $a\beta\delta$ = d. Zweiecke $ak\alpha ga = \frac{a}{4R} . S$

Es ist klar, daß die Summe der drei betrachteten Zweiecke gleich der halben Kugelfläche + dem zwiefachen Dreieck abd sei, oder es ist

$$\frac{(a+b+d) . S}{4R} = \frac{S}{2} + 2D, \text{ folglich auch}$$

$$D = \frac{(a+b+d) . S}{8R} - \frac{S}{4}; \text{ oder wenn die beiden letzten Glieder gleichnahmig}$$

gemacht werden,

$$D = \frac{(a+b+d-2R) . S}{8R}, \text{ mithin auch}$$

$$D . 8R = (a+b+d-2R) . S \text{ und}$$

$$D : S = (a+b+d-2R) : 8R.$$

2. Auch die Fläche eines jeden Afterdreiecks verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie der Ueberschuß der Winkelsumme des Afterdreiecks über zwei rechte Winkel sich zu acht rechten Winkeln verhält.

Denn es werde das zum Dreiecke abd=D gehörige Afterdreieck abiBhda betrachtet und durch D′ bezeichnet, so ist offenbar $D' = \frac{S}{2} - D = \frac{4R.S}{8R} - D$, oder vermöge der vorvorletzten Gleichung in S. 1

$$D' = \frac{4R.S}{8R} - \frac{(a+b+d-2R).S}{8R}, \text{ d. h.}$$

$$D' = \frac{6R-(a+b+d)}{8R}.S, \text{ daher auch:}$$

$D'.8R=(6R-(a+b+d)).S$ und $D':S=(6R-(a+b+d)):8R$.

Der Satz wird also ohne Zweifel sein, wenn erwiesen ist, daß $6R-(a+b+d)$ dem Ueberschusse der Winkelsumme des Afterdreiecks über 2R gleich sei, welches folgendermaßen erhellt. Es ist der Winkel des Afterdreiecks bei $a=4R-a$

$$b=2R-b$$
$$d=2R-d$$

die Winkelsumme des Afterdreiecks $=8R-(a+b+d)$

folglich der Ueberschuß der Winkelsumme des Afterdreiecks über 2 rechte Winkel gleich $6R-(a+b+d)$.

Sphärische Vier- und Vielecke und die Vergleichung ihres Flächeninhalts mit der Kugelfläche.

§. 41.

1. So wie ein sphärisches Dreieck, das Wort im weitern Sinne genommen, so daß auch der Begriff des Afterdreiecks nicht ausgeschlossen ist, durch die Begränzung eines Theils der Kugelfläche mittelst dreier Normalkreisbogen entsteht (§. 14), so entsteht im Allgemeinen auch ein sphärisches Viereck oder Vieleck, wenn ein Theil der Kugelfläche von vier oder mehr Normalkreisbogen, die einzeln entweder sämmtlich kleiner oder zum Theil auch größer als 180° sein können, eingeschlossen wird.

2. Die Idee der Sphärengeometrie verlangt die Entwickelung der Constructionsgesetze für alle diese sphärischen Figuren und nächst ihnen auch die für den Sphärenkreis, so wie bis dahin die Constructionsgesetze der sphärischen Dreiecke abgehandelt worden sind. Da indeß die Darstellung der bisherigen Lehren, ungeachtet sie nur den Anfang der ihrer Idee nach unendlichen Wissenschaft geben, schon einen beträchtlichen Raum eingenommen hat und da im folgenden noch die Constructionsgesetze der sphärischen Dreiecke, auch der allgemeinen Aufgabe der Trigonometrie gemäß, entwickelt werden sollen, so findet gegenwärtig hier nur noch die allgemeine Vergleichung der Fläche eines jeden sphärischen Vier- oder Vielecks mit der Kugelfläche statt.

3. Die Fläche eines jeden sphärischen Vier- oder Vielecks V verhält sich zur ganzen Kugelfläche S wie der Ueberschuß der Winkelsumme der Figur über das Product von der um 2 verminderten Seitenzahl derselben in zwei rechte Winkel sich zu acht rechten Winkeln verhält; oder wenn die Winkelsumme der Figur durch m und die Seitenzahl derselben durch n bezeichnet wird, so ist:

$$V : S = (m - (n-2)\,2R) : 8R.$$

Denn man denke sich die Figur durch Normalkreisbogen, welche von einem innerhalb der Figur angenommenen Punct nach allen Winkelpuncten derselben gezo-

gen sind, in lauter sphärische Dreiecke (im weitern Sinne des Worts) getheilt, so werden deren so viel sein, als die Figur Seiten hat, oder die Zahl der Dreiecke ist = n. Es ist aber die Winkelsumme dieser Dreiecke gleich der Winkelsumme der Figur V + den vier rechten Winkeln, welche um den angenommenen Punct herum entstehen, oder die Winkelsumme der Dreiecke ist = m + 4R. Nun verhält sich ein jedes Dreieck zu seiner Winkelsumme weniger 2R, wie sich die Kugelfläche S zu 8 R verhält, verm. §. 40, 1 und 2; folglich kann man nach einem bekannten Gesetz der Proportionslehre auch schließen, daß die Summe aller Dreiecke d. h. V zur Winkelsumme aller Dreiecke weniger so vielmal 2 R als Dreiecke da sind, eben so wie S zu 8 R sich verhalten müsse; mithin hat man:

$$V : (m + 4R - n \cdot 2R) = S : 8R, \text{ oder}$$

$$V : (m - (n - 2)\,2R) = S : 8R \text{ und auch}$$

$$V : S = (m - (n - 2)\,2R) : 8R.$$

Die Trigonometrie auf der Sphäre.

Einleitung.

§. 1.

So wie nach der Ebenengeometrie die Ebenentrigonometrie aus der Idee entspringt, die so lange durch räumliche Construction bestimmten und unmittelbar gefundenen Größen auch arithmetisch, entweder in Zahlen oder in Zahlsymbolen d. h. analytischen Ausdrücken zu entwickeln, sobald die erforderlichen Data gleichfalls in derselben Form gegeben sind: so bildet sich auf gleiche Weise nächst der Sphärengeometrie auch die Sphärentrigonometrie, deren Aufgabe mithin darin besteht, aus den in Zahlen oder allgemeinen Zeichen ausgedrückten Datis einer jeden durch den Normal- und Sphärenkreis vermittelten Construction auf der Sphäre die durch dieselbe Construction nothwendig bedingten Größen eben so bestimmt in der Form der Zahl oder in Zahlsymbolen zu entwickeln, wie die räumliche Construction dieselben in ursprünglicher Gestalt unmittelbar findet.

§. 2.

Das Gebiet der Sphärentrigonometrie ist sonach, eben sowohl wie das der Geometrie, unendlich, da jede mit dem Normal- und Sphärenkreis zu Stande gebrachte Construction ein Gegenstand derselben sein kann; weil indeß die Construction des sphärischen Dreiecks als die Grundlage zu einer unendlichen Menge anderer Constructionen, insbesondere solcher, welche bloß durch Normalkreisbogen begränzte sphärische Figuren geben, betrachtet werden kann, so ist der Zweck der

rengeometrie hinlänglich bekannt, daß es zu deren arithmetischen oder analytischen Entwickelung keiner besondern trigonometrischen Operation mehr bedarf, da diese Elemente theils $=90°$, theils in einer willkührlich anzunehmenden Zahl von Graden als Oppoſita einander gleich ſind (§. 38 und 39, I. A. B. C.)

§. 4.

Zur Bewältigung der obigen Probleme bedient ſich die Sphären- eben ſo wie die Ebenentrigonometrie der bekannten trigonometriſchen Functionen, vornehmlich der Sinus und Tangenten, und zwar ganz ausſchließlich für alle Elemente des ſphäriſchen Dreiecks, ſo daß ſie nicht nur den Winkeln, ſondern auch den Seiten der Dreiecke, da dieſelben als Kreisbogen, gleich den Winkeln, nach Graden beſtimmt werden, die zugehörigen trigonometriſchen Functionen den Umſtänden gemäß ſubſtituirt. Sonach wird auch jedes geſuchte Element durch die trigonometriſche Conſtruction genöthiget, ſich zuvörderſt in der Geſtalt einer trigonometriſchen Function zu ſtellen, aus welcher es ſodann als zugehöriger Bogen oder Winkel alsbald ſelber in ſeiner unmittelbar geſuchten Geſtalt hervor tritt. Weil nehmlich jedes Element eines ſphäriſchen Dreiecks, ſeiner Natur gemäß, kleiner als $180°$ iſt, ſo ſchwankt die Entſcheidung, welche aus der bereits-gefundenen Function das geſuchte Element ſelbſt entnehmen ſoll, ungeachtet zu jeder Function an ſich eine unbeſtimmte Zahl verſchiedener Werthe gehört, doch immer nur zwiſchen zwei Supplementarwerthen, für deren einen nun jedesmal ein durch die Sphärengeometrie vorbereitetes Kriterium, dergleichen z. B. dort in §. 31 — 33 zu finden, den Ausſchlag giebt, falls die Aufgabe nur in ſich beſtimmt iſt; wenn ſie aber ihrem Weſen nach zweideutig iſt, ſo verſteht es ſich von ſelbſt, daß die trigonometriſche Conſtruction, bei der, der Natur der Sache ſodann gemäßen Abweſenheit eines ſolchen Kriteriums, in dem Doppelwerthe der hervor gerufenen Function eben ſowohl, wie die Geometrie, ein zwiefaches Reſultat liefert; ſo fern das zu entwickelnde Element in zwei Supplementarwerthen zugleich möglich iſt; ſind hingegen die beiden Werthe deſſelben nicht ſupplementariſch, ſo muß nothwendig auch die trigonometriſche Conſtruction zwei verſchiedene Functionen und ſomit gleichfalls auch zwei verſchiedene Werthe ergeben, indem alsdann wiederum eine jede dieſer Functionen durch ein der Geometrie abgefordertes und nun ihr verweigertes Kriterium auf einen entſchiedenen

Uebrigens trennt die Sphärentrigonometrie die Entwickelung ihrer Construktionsgesetze für solche Aufgaben, bei denen ein rechter Winkel unter den Datis sich befindet, von der der übrigen, in welchen dieser Umstand nicht statt findet *, und macht mit jener als der einfacheren und leichteren und für die andere zugleich vorbereitenden Theorie den Anfang.

* Die gewöhnliche Bezeichnung dieses Unterschiedes durch die Ausdrücke: „Auflösung rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke" ist unlogisch, weil ja auch in der zweiten Kategorie rechtwinklige Dreiecke vorkommen können und müssen, nur daß bei ihnen der rechte Winkel nicht zu den gegebenen sondern zu den gesuchten Elementen gehört.

Auflösung aller Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Elementen eines sphärischen Dreiecks ein rechter Winkel sich befindet.

§. 6.

1. Es mögen hier und in den folgenden Sätzen an einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Hypotenuse mit H, die beiden Katheten mit B und P, so wie deren Gegenwinkel nach der Ordnung mit b und p bezeichnet werden, und es sei brp ein rechtw. sphär. Dreieck, worin von den eben genannten Stücken H, B, P, b, p jedes einzelne kleiner als 90° ist. Der Mittelpunct der Sphäre sei c. Fig. 27.

2. Es werde B nach a und P nach B′ bis zu 90° verlängert, durch B′ und a werde der Bogen B′a eines Normalkreises gelegt und H werde, bis es letzteren in d erreicht, verlängert: so ist in dem bei r rechtwinkligen Dreiecke B′ra, weil darin zugleich B′r = 90°, auch a ein rechter Winkel und B′a ebenfalls = 90°, der Winkel B′ aber an Graden = dem Bogen ar (§. 29, 4. Geom.). Eben so ist nun auch in dem bei a rechtwinkligen Dreiecke dap, weil darin zugleich pa = 90°, auch bei d ein rechter Winkel und pd = 90°, der Winkel p aber an Graden = dem Bogen ad.

In den rechtw. Dreiecken brp, bdB′ sind also die Seiten H + H′ = 90°, P + P′ = 90°, ferner der Winkel p = ad = 90° − p′ d. h. der Winkel p und die Seite p′ zusammen ebenfalls = 90°, und so auch die Seite B und der Winkel B′ zusammen = 90°, daß also überdies auch im Dreiecke bdB′ jede Seite und jeder Winkel außer dem rechten, eben so wie in brp, kleiner als 90° ist.

Auf gleiche Weise werden die Katheten P und B auch nach den entgegengesetzten Seiten bis in e und P′ zu 90° verlängert, durch e und P′ werde wieder der Normalkreisbogen P′e gelegt und H werde bis an letzteren in f verlängert, so hat man aus gleichen Gründen wie vorhin, in den Dreiecken brp und pfP′ die Seiten und Winkel H + H′ = 90°, B + B′ = 90°, b + b′ = 90°, P + P′ = 90° und in pfP′ jedes Element außer dem rechten Winkel gleichfalls kleiner als 90°.

Es ist also sin H = cos H′, cos H = sin H′; sin p = cos p′, cos p = sin p′ u. s. f., daß nehmlich überall in den erwähnten Dreiecken brp, bdB′, pfP′ für die trigonometrischen Functionen der Elemente des einen die Complementarfunctionen der durch dieselben Buchstaben bezeichneten Elemente der beiden andern Dreiecke substituirt werden können, welches alsbald mit Vortheil geschehen wird.

3. Es werde dg auf ca und bi auf cr senkrecht gezogen, so ist dg der Sinus des Bogens ad, folglich auch der Sinus des von ad gemessenen Winkels p, und bi ist der Sinus der Seite P; zugleich sind wegen der rechten Winkel in a und r beide Linien dg und bi auf der Ebene des Quadranten acp senkrecht und mit einander parallel. Wenn ferner noch bh auf cp senkrecht gezogen wird, so ist bh der Sinus der Seite H, und wegen des Quadranten dbp und rechten Winkels dcp sind auch cd und bh beide auf cp senkrecht und mit einander parallel. Mithin sind auch die Winkel cdg, hbi, weil ihre Schenkel parallel sind, in den bei g und i rechtwinkligen ebenen Dreiecken dgc, bih gleich und die Dreiecke selbst folglich einander ähnlich. Daher ist cd : bh = dg : bi, oder:

1) sin tot : sin H = sin p : sin P; und eben so ist auch

2) sin tot : sin H = sin b : sin B, d. h.

der Sinustotus verhält sich zum Sinus der Hypotenuse wie sich der Sinus eines Winkels zum Sinus des ihm gegenüberstehenden Katheten verhält.

Ueberdies hat man mit obigen beiden Proportionen zugleich folgende: sin p : sin P = sin b : sin B; d. h.

es verhalten sich im rechtw. sphär. Dreiecke überhaupt die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

In dem Dreiecke bdB′ ist nun also auch sin tot : sin P′ = sin B′ : sin H′
und im Dreiecke pfP′ ist eben so: sin tot : sin B′ = sin P′ : sin H′,
woraus vermittelst der nach S. 2 anwendbaren Substitution hervorgeht:

3) sin tot : cos P = cos B : cos H.

Ferner ist in bdB′ auch sin tot : sin P′ = sin b : sin p′
und in pfP′ ist sin tot : sin B′ = sin p : sin b′,
daher vermöge S. 2 noch

4) sin tot : cos P = sin b : cos p und

5) sin tot : cos B = sin p : cos b.

4. Es werde auf ca zwischen a und der verlängerten cd die senkrechte ak und auf cr zwischen r und der verlängerten ch die senkrechte rl errichtet, so ist ak

die Tangente des Bogens a d und des Winkels p und r l ist die Tangente des Katheten P. Ferner werde aus l die l m auf c p senkrecht gezogen, so sind aus gleichen Gründen wie in S. 3, die Ebenen der Dreiecke c a k, m r l parallel und die Dreiecke selbst einander ähnlich; zugleich sind wegen des erstern Umstandes die in der Ebene des Quadranten befindlichen geraden Linien c a, m r parallel, daß also, weil a c p ein rechter Winkel ist, auch m r auf c p senkrecht und mithin m r der Sinus des Katheten B ist. Es ist sonach c a : m r = a k : r l, oder:

1) sin tot : sin B = tang p : tang P = * cot P : cot p

wie auch sin tot : tang P = cot p : sin B; und eben so ist

2) sin tot : sin P = tang b : tang B = cot B : cot b

wie auch sin tot : tang B = cot b : sin P, d. h.

Der Sinustotus verhält sich zum Sinus eines Katheten, wie sich die Tangente des anliegenden Winkels zur Tangente des andern Katheten verhält u. s. f.

Es ist also im Dreiecke b d B' auch sin tot : sin p' = tang B' : tang H'

und im Dreiecke p f P' ist sin tot : sin b' = tang P' : tang H', daher hat man verm. S. 2

3) sin tot : cos p = cot B : cot H = tang H : tang B

wie auch sin tot : cot H = tang B : cos p, und eben so:

4) sin tot : cos b = cot P : cot H = tang H : tang P

wie auch sin tot : cot H = tang P : cos b.

Endlich ist in b d B' noch sin tot : sin H' = tang b : tang p', oder

in p f P ist sin tot : sin H' = tang p : tang b', weshalb wieder nach Satz 2

5) sin tot : cos H = tang b : cot p = tang p : cot b

wie auch sin tot : cot p = cot b : cos H.

* Anmerk. Da die Kenntniß der Ebenentrigonometrie wie die der Ebenengeometrie und Stereometrie hier vorausgesetzt werden muß, so ist es für den Anfänger kaum nöthig zu bemerken, daß die Verwechslung der Verhältnisse der Tangenten und Cotangenten sich auf den Satz gründe, daß das Product aus der Tangente und Cotangente desselben Winkels oder Bogens gleich dem Quadrat des Sinustotus ist. Nehmlich weil tang p . cot p = tang P . cot P = sin tot^2, so ist auch tang p : tang P = cot P : cot p; eben so tang p : cot P = tang P : cot p; ferner eben daher tang p = $\frac{\sin tot^2}{\cot p}$, also sin tot : sin B = $\frac{\sin tot^2}{\cot p}$: tang P, oder sin tot : $\frac{\sin tot^2}{\cot p}$ = sin B : tang P, oder $\frac{\sin tot^2}{\cot p}$: sin tos = tang P : sin B und daher sin tot : cot p = tang P : sin B. u. s. f.

5. Weil jedem rechtw. sphär. Dreiecke, dessen Elemente, abgesehen vom rechten Winkel, nicht sämmtlich einzeln kleiner als 90° sind, allemal ein Seitendreieck zugehört, dessen Elemente respective mit denjenigen des ursprünglichen Dreiecks, welche kleiner als 90° sind, gleich, von denjenigen aber, die größer als 90°, die Supplemente sind, so daß folglich alle Elemente dieses Seitendreiecks, mit Ausnahme des rechten Winkels, kleiner als 90° sind (Geom. §. 33, 5): so müssen sämmtliche in S. 3 u. 4 erwiesene Proportionen, da jedes Glied derselben als eine trigonometrische Function mit einem Elemente über 90° eben sowohl als mit dessen Supplementarelement unter 90° zusammen gehört, nicht bloß, wie bisher nur der einfacheren Demonstration zu Gunsten diese Beschränkung statt gefunden hat, für solche Dreiecke, deren Seiten und Winkel außer dem rechten sämmtlich kleiner als 90° sind, sondern überhaupt für jedes rechtwinklige sphär. Dreieck gültig und anwendbar sein, welche Größe über oder unter 90° die einzelnen Elemente desselben auch haben mögen.

6. In dieser Allgemeingültigkeit bilden die obigen in S. 3 und 4 festgestellten Proportionen den Schlüssel zur unfehlbaren Auflösung einer jeden unter der angegebenen Kategorie begriffenen Aufgabe. Es sind nehmlich jedesmal außer dem rechten Winkel noch zwei Elemente des Dreiecks gegeben, aus welchen ein drittes Element gefunden werden soll. Man sucht daher unter den in S. 3 und 4 befindlichen 10 Hauptproportionen diejenige auf, welche nächst dem Sinustotus diese drei Elemente enthält. Daß dieselbe unter ihnen jedesmal anzutreffen sein muß, ist durch eine leichte Combination ein für allemal zu übersehen, indem gerade die 10 Proportionen in ihren 3 letzten Gliedern zusammen die 10 möglichen Conternationen erschöpfen, welche, mit Ausnahme des rechten Winkels unter den übrigen 5 Elementen des rechtw. Dreiecks statt finden. Die gefundene Proportion wird nun so geordnet, falls sie es nicht schon an sich ist, daß das gesuchte Element ihr letztes Glied wird, so hat man durch eine Regeldetri aus den 3 andern bekannten Gliedern die Gleichung für das Gesuchte und darf nach der Entwickelung nur noch entscheiden, welcher von den beiden mit der gefundenen Function zusammen gehörigen Supplementarwerthen der wahre sei, zu welchem Behuf die Sphärengeometrie, wenn die Aufgabe anders nur wirklich bestimmt ist, das erforderliche Kriterium unfehlbar liefern muß. Hiernächst könnte also ohne weiteres zur Auflösung aller möglichen Fälle der Reihe nach geschritten werden; jedoch ist es um der Sache selbst und einer leichteren Ausführung willen von Wichtigkeit, die obigen

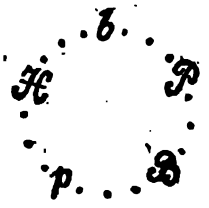
gen

gen Proportionen zuvörderst noch unter ein allgemeineres Gesetz zu begreifen, nach welchem man immer die für die jedesmalige Auflösung erforderliche Proportion mit Leichtigkeit und in aller Kürze sogleich zu construiren vermag, ohne daß es nöthig ist, alle 10 Proportionen im Gedächtnisse oder in einem schriftlichen Verzeichnisse zu diesem Behuf besonders in Bereitschaft zu halten. Die Feststellung dieses interessanten Gesetzes ist daher noch der Gegenstand des folgenden §phen.

§. 6.

1. Von fünf in stetiger Kreisfolge begriffenen Elementen a, b, c, d, e befinden sich jede drei entweder in einer ununterbrochenen Folge, wie a, b, c; — d, e, a u. s. m. oder nicht, wie a, b, d; — b, d, e u. s. w. In jenem Fall ist allemal von den drei Elementen eins in der Mitte zwischen zwei ihm zunächst angränzenden, (medium et duo extrema conjuncta), welches an und für sich klar ist; in diesem Fall ist die Form der Folge gleichfalls constant, es ist nehmlich alsdann wieder eins der drei Elemente in der Mitte zwischen den beiden andern, aber von jedem derselben durch eins der beiden noch übrigen Elemente getrennt, (medium et duo extrema disjuncta), welches, eben weil die Zahl aller Elemente = 5 ist, nicht minder schwer einleuchtet. So ist von den drei Elementen: d, a, b das mittlere: d und die beiden abgesonderten sind: a und b; desgleichen von den drei Elementen: b, d, e ist b das mittlere und d und e sind die abgesonderten u. s. w.

2. Wenn man also in einem rechtwinkl. sphär. Dreiecke brp, mit gänzlicher Ausschließung und Uebergehung des rechten Winkels, die übrigen fünf Elemente unter einer ähnlichen, der Natur ihrer Lage gemäßen Kreisfolge begreift, so daß, wenn man mit der Hypotenuse H anfängt, dieser ein Winkel b, diesem ein Kathet P folgt, an welchen unmittelbar der andere Kathet B sich anschließt, den sodann endlich der Winkel p wieder mit H verbindet, daß mithin das Schema dieser Kreisfolge durch nachstehende Figur vorgestellt werden kann: Fig. 27.



so ist klar, daß in jeder zur herrschenden Kategorie gehörigen Aufgabe die beiden nebst dem rechten Winkel gegebenen Elemente und das dritte, welches aus ihnen gefunden werden soll, in Absicht der Form ihrer Folge nothwendig zu einem der beiden in S. 1 erwähnten Fälle gehören, sie werden nehmlich entweder ein mittleres mit zwei abgesonderten, oder ein mittleres mit zwei anliegenden Stücken bilden. Soll z. B. aus einem Katheten P und dem anliegenden Winkel b der andere Winkel p gefunden werden, so hat man eine Folge von der 1sten Form, indem p das mittlere, b und P die abgesonderten Glieder sind; sollte hingegen aus P und b der andere Kathet B gefunden werden, so gehörte die Folge dieser Elemente zur 2ten Form, indem P das mittlere, B und b die anliegenden Stücke sind u. s. w.

5. Da jedes der 5 Elemente ein mittleres, mit entweder zwei abgesonderten oder zwei anliegenden Stücken werden kann, so gehören natürlich unter jede Form auch 5 besondere Fälle, die ohne Umstände aufzuzählen sind.

Nehmlich die 5 Fälle der 1sten Form sind, wenn die Mittelglieder der Reihe nach P, B, H, p, b und immer zuletzt geschrieben werden, diese:

H, p, P. H, b, B. P, B, H. P, b, p. B, p, b.

Die 5 Fälle der 2ten Form, wenn die Mittelglieder der Reihe nach B, P, p, b, H und wieder zuletzt geschrieben werden, sind:

P, p, B. B, b, P. H, B, p. H, P, b. p, b, H.

4. Jetzt zeigt ein vergleichender Rückblick auf die 10 Hauptproportionen des vorhergehenden §. 5., daß die Glieder der 5 Proportionen in S. 3. nach der Reihe die aufgezählten 5 Fälle der 1sten Form, die Glieder der 5 übrigen Proportionen in S. 4. hingegen nach der Reihe die aufgezählten 5 Fälle der 2ten Form darstellen. Zugleich dringt sich bei dieser Vergleichung die Bemerkung auf, daß in den 5 ersten Proportionen alle Elemente, die mittleren, wie die abgesonderten, sämmtlich durch Sinus eingeführt sind, da hingegen in den 5 andern Proportionen immer nur das mittlere Stück durch einen Sinus, die beiden anliegenden aber durch Tangenten vertreten werden.

5. Um das hierin angedeutete Gesetz in seiner Bestimmtheit zu fassen, lege man bei den Proportionen in S. 4 von den drei verschiedenen Gestalten, worin jede derselben mitgetheilt ist, immer die letzte zum Grunde, weil in dieser, so wie bei den Proportionen in S. 3, allemal das mittlere Stück im vierten Gliede der Proportion vorkommt, und schreibe der bequemeren Uebersicht wegen die Proportionen hintereinander auf, so zeigt sich auf einen Blick, daß das in allen 10 Proportionen im vierten Gliede durch einen Sinus eingeführte mittlere Stück, wenn dasselbe ein Kathet ist, durch seinen Sinus schlechthin, wenn es aber ein Winkel oder die Hypotenuse ist, durch seinen Cosinus dargestellt sei. Von den äußeren Stücken hingegen ist in den 5 ersten Proportionen, in welchen sie als abgesonderte Stücke durch lauter Sinus ausgedrückt sind, jedes einzelne, wenn es ein Kathet ist, durch seinen Cosinus, und wenn es ein Winkel oder die Hypotenuse ist, durch seinen Sinus vertreten; aber in den 5 letzten Proportionen, in denen die abgesonderten Stücke als solche durch lauter Tangenten eingeführt sind, ist wiederum jedes einzelne, wenn es ein Kathet ist, durch seine Tangente schlechthin, wenn es aber ein Winkel oder die Hypotenuse ist, durch seine Cotangente dargestellt.

6. Der Ausdruck dieses Gesetzes gewinnt mit einer kleinen Vorrichtung, vermöge welcher eine übereinstimmige Form der Proportionen gebildet wird, die höchste Einfachheit. Man setze nehmlich überall statt der Katheten P und B ihre Complemente, und bezeichne diese mit P′ und B′, so ist $\sin P = \cos P'$, $\cos P = \sin P'$, $\tang P = \cot P'$, $\cot P = \tang P'$, und man erhält sonach an der Stelle der 5 ersten Proportionen in S. 3 die folgenden:

1) $\sin tot : \sin H = \sin p : \cos P'$
2) $\sin tot : \sin H = \sin b : \cos B'$
3) $\sin tot : \sin P' = \sin B' : \cos H$
4) $\sin tot : \sin P' = \sin b : \cos p$
5) $\sin tot : \sin B' = \sin p : \cos b$

das giebt für alle Fälle der 1sten Form die Regel:

Wenn statt eines jeden Katheten sein Complement genommen wird, so verhält sich der Sinustotus zum Sinus des einen abgesonderten Stücks, wie sich der Sinus des andern abgesonderten Stücks zum Cosinus des mittlern Stücks verhält.

Statt der 5 andern Proportionen in S. 4 ergiebt sich

1) $\sin tot : \cot P' = \cot p : \cos B'$
2) $\sin tot : \cot B' = \cot b : \cos P'$

3) sin tot : cot H = cot B′ : cos p
4) sin tot : cot H = cot P′ : cos b
5) sin tot : cot p = cot b : cos H

und für alle Fälle der 2ten Form die Regel:

Wenn statt eines jeden Katheten sein Complement genommen wird, so verhält sich der Sinustotus zur Cotangente des einen anliegenden Stücks, wie sich die Cotangente des andern anliegenden Stücks zum Cosinus des mittlern Stücks verhält.

Faßt man die Proportionen als Gleichungen zwischen den Producten der Außen- und Innenglieder, so lauten die beiden Regeln, vorausgesetzt, daß jeder Kathet mit seinem Complement vertauscht werde, ganz kurz so:

Das Product aus dem Sinustotus in den Cosinus des mittleren Stücks ist gleich dem Producte aus den Sinus der abgesonderten, und aus den Cotangenten der anliegenden Stücke.

7. Es ist klar, daß die Vorrichtung, vermöge deren die übereinstimmige Gestalt der obigen Proportionen herbeigeführt wird, eben sowohl auch darin bestehen kann, daß man für die Hypotenuse und die beiden Winkel ihre Complemente setzt und dagegen die Katheten unverändert beibehält; die Regeln werden dann eben so kurz bleiben und sich durch nichts als die Verwechselung zwischen Sinus und Cosinus, Tangenten und Cotangenten von obigen unterscheiden. Wirklich gab der um die Trigonometrie so verdiente Neper die Regeln in der zuletzt erwähnten Gestalt; doch haben die gegenwärtigen in so fern den Vorzug, daß sie nur zwei solche Substitutionen nöthig machen, deren zu den Neperschen Regeln drei erforderlich sind. Der Gebrauch der Regeln selber wird übrigens kaum noch einer Erläuterung bedürfen.

Es sei z. B. aus den beiden Katheten P und B die Hypotenuse zu suchen: so sieht man zuvörderst, daß der Fall zur ersten Form gehöre, H nehmlich ist das mittlere Stück zwischen den abgesonderten B und P und es ist folglich nach der 1sten Regel:

sin tot . cos H = sin P′ . sin B′ oder sin tot : sin P′ = sin B′ : cos H

d. h. sin tot : cos P = cos B : cos H

welches die 3te Proportion im §. 5, 3 ist, eben so wie man sie sonst von dort zur Auflösung der Aufgabe hätte entlehnen müssen. — Wenn hingegen aus einem Katheten P und Winkel b der andere Kathet B zu suchen wäre, so hat man einen Fall

der 2ten Form, indem P ein mittleres Stück zwischen den anliegenden b und B ist; also nach der 2ten Regel:

$$\sin \text{tot} \cdot \cos P' = \cot B' \cdot \cot b \text{ oder: } \sin \text{tot} : \cot B' = \cot b : \cos P'$$

d. h. $\sin \text{tot} : \text{tang } B = \cot b : \sin P$

welches die zur Auflösung der Aufgabe erforderliche 2te Proportion in §. 5, 4 ist u. s. f.

8. Es ist übrigens noch eine dem Interesse des Gegenstandes angemessene Bemerkung, daß jene beiden Neperischen Regeln auch sogleich von vorn herein sich hätten erweisen lassen, wo sodann erst die einzelnen Proportionen des 5ten Sphen zum nachmaligen Gebrauch aus ihnen abgeleitet sein würden, statt daß hier umgekehrt die Proportionen zuerst entwickelt und aus diesen durch Induction die beiden Hauptregeln gefolgert worden sind. Dieser Gang des Vortrags ist indeß theils deshalb gewählt worden, weil er der historischen Entwickelung dieses Gebiets der Wissenschaft gemäß ist, theils weil er zugleich für den Anfänger, der in der größeren Abstraction des entgegengesetzten Verfahrens zu viel Schwierigkeiten gefunden haben möchte, unfehlbar der leichtere ist. Wem indessen daran liegt, sich die beiden wichtigen Regeln ganz unabhängig durch einen directen Beweis zu begründen, der kann denselben auf folgende Weise durchführen.

Die Einleitung ist so wie sie in §. 5, 2 an Fig. 27. vorgenommen worden; außerdem werden nur noch die auf einander senkrechten Quadranten aB', rP', bis sie in a und n, desgleichen die ebenfalls auf einander senkrechten Quadranten eP', rB', bis sie in e und o sich gegenseitig zu Halbkreisen begränzen, verlängert: so entsteht ein System von fünf sphärischen Dreiecken prb, bdB', $B'oq$, qnP', $P'fp$, die nach der Reihe in r, d, o, n, f rechtwinklig sind und von denen sich aus der Construction und hinlänglich bekannten Sätzen der Sphärengeometrie bald erweisen läßt, daß jede drei in jedem Einzelnen dieser Dreiecke enthaltene Elemente, die entweder eine Conternation von der 1sten oder 2ten Form darstellen, auch in den übrigen vier Dreiecken, sowohl der Größe als jener Verbindungsform nach, wieder vorkommen, jedoch so, daß die Ternion in jedem Dreiecke immer eine andere, als in allen übrigen ist, daß mithin durch die Größen derselben drei Elemente in allen fünf Dreiecken auch alle fünf mögliche Fälle der einen oder der andern Form der Reihe nach aufgezeigt werden; vorausgesetzt, daß statt eines jeden Katheten überall sein Complement genommen wird. So ist, wenn man die Dreiecke in der vorhin angegebenen Folge durchgeht, der Hypotenuse bp des 1sten Dreiecks gleich das Complement des Katheten bd des 2ten Dreiecks; ferner ist ihr gleich (an Gra-

den der Winkel oqB des 3ten, wie auch der Winkel nqP′ des 4ten Dreiecks; (denn wegen der Quadranten qs, qf ist ein jeder der beiden Winkel in q an Graden dem Bogen sf gleich, der wiederum gleich bp ist, weil er, eben so wie bp, das Complement des Bogens pf ausmacht); und endlich ist der Hypotenuse bp, wie so eben bemerkt worden, gleich das Complement des Katheten pf im 5ten Dreiecke. Auf gleiche Weise findet man den Winkel p im Complement des Katheten B′d des 2ten, in der Hypotenuse B′q des 3ten, in dem Complement des Katheten nq des 4ten, und im Winkel fpP′ des 5ten Dreiecks wieder. Eben so wird das Complement des Katheten br des 1sten Dreiecks zur Hypotenuse bB′ des 2ten, zum Complement des Katheten oB′ des 3ten, zum Winkel nP′q des 4ten, und zum Winkel pP′f des 5ten Dreiecks. — Die Elemente H, p, P′ des 1sten Dreiecks, wenn sie gemeinschaftlich durch ihre Verwandlungen in allen Dreiecken verfolgt werden, bilden also der Reihe nach: im 2ten Dreiecke die Complemente der beiden Katheten bd, B′d und die Hypotenuse bB′, welche man der gangbaren Bezeichnungsweise gemäß durch P′, B′, H darstellen kann; im 3ten Dreiecke geben sie einen Winkel oqB′, die Hypotenuse B′q und das Complement des jenem Winkel opponirten Katheten oB′, welche durch b, H, B′ zu bezeichnen sind; im 4ten Dreiecke zeigen sie sich als ein Winkel nqP′, als das Complement des diesem Winkel anliegenden Katheten nq und als der dem letzteren gegenüberstehende Winkel nP′q, welche durch b, P′, p darzustellen sind; und endlich erscheinen sie im 5ten Dreiecke als das Complement eines Katheten pf und als der ihm gegenüberstehende und anliegende Winkel fpP′ und pP′f, welche durch die allgemeinen Zeichen B′, b, p vorgestellt werden. Der vollständige Kreislauf der Metamorphose derselben drei Elemente ist mithin durch folgende Ternionen dargestellt:

H, p, P′. P′, B′, H. b, H, B′. b, P′, p. B′, b, p,

welches die sämmtlichen in §. 6, 3 aufgezählten 5 Fälle der 1sten Verbindungsform sind. Hat man also, was noch in §. 5, 3 für jeden der 5 Fälle besonders geschehen mußte, nur für irgend einen Fall dieser Verbindung die bestehende Proportion erwiesen, z. B. bloß für den 1sten eben so wie in §. 5, 3, so hat man sie damit auch für die vier übrigen dargethan und die 1ste Nepersche Regel ist eben nichts anders, als der Ausdruck dieser Identität der für die 5 Fälle der 1sten Verbindungsform gültigen fünf Proportionen.

Auf gleiche Weise läßt sich, wie ohne weitere Erörterung verständlich ist, die 2te Nepersche Regel begründen, womit also statt der sonstigen Induction ein abso-

letzter Beweis beider Regeln durchgeführt ist; und sonach kann jetzt, nachdem alle Vorrichtungen hinlänglich ins Licht gestellt sind, zur bestimmten Auflösung aller unter die herrschende Kategorie gehörigen Fälle selbst geschritten werden, welches den Inhalt des folgenden Syhen ausmacht.

§. 7.

Die außer dem rechten Winkel gegebenen Elemente sind entweder beide zugleich $= 90°$, oder nur eins oder gar keins derselben ist $= 90°$. Unter den zuerst genannten Umständen weiß man bereits aus §. 29, 4 d. Geom., daß sodann immer vier Stücke des Dreiecks, nehmlich nebst dem rechten Winkel jedesmal noch die Hypotenuse, ein Kathet und sein Gegenwinkel einzeln $= 90°$ sind, und daß die beiden übrigen Stücke, der zweite Kathet und sein Gegenwinkel an Graden gleich sein müssen, aber jede Größe haben können, wenn nicht der eine oder andere von beiden bestimmt gegeben ist — und diese allgemeine Bestimmung kann schon als hinlängliche Vorschrift zur Auflösung eines jeden hieher gehörigen besonderen Falls ein für allemal betrachtet werden; es sollen indeß, um der Gleichmäßigkeit und systematischen Vollständigkeit der Darstellung willen, bei jedem einzelnen Fall unten die Resultate auch unter diesen Bedingungen ausdrücklich ganz kurz bemerkt werden.

Wenn von den beiden gegebenen Elementen keines $= 90°$ ist, so muß auch jedes der drei gesuchten Elemente kleiner oder größer als $90°$ sein, mit Ausnahme des einzigen Umstandes, wenn die gegebenen Stücke zwei an Graden gleiche Oppositа sind, wo alle übrige Elemente einzeln $= 90°$ sind (verm. §. 31, 2 und 3. Geometrie); außerdem ist also die Möglichkeit, daß irgend ein gesuchtes Element $= 90°$ sein könne, wenn von den gegebenen, abgesehen vom rechten Winkel, keines $= 90°$ ist, gänzlich abgeschnitten und die Auflösung darf von derselben mithin gar keine Notiz nehmen, welches hier noch ein für allemal in Erinnerung gebracht wird.

Die Auflösung jedes einzelnen Falls wird sonach eine vierfache Abtheilung erhalten, je nachdem nehmlich 1) beide gegebene Elemente zugleich $= 90°$, oder 2tens und 3tens nur das eine oder andere $= 90°$, oder 4) sofern keines der gegebenen Elemente $= 90°$ ist. Nach der in §. 3. angegebenen allgemeinen Classification bildet sich nun, unter den für das rechtwinklige Dreieck erforderlichen Modificationen, die ausführliche Reihe aller Fälle mit den sämmtlichen zugehörigen Aufgaben und Auflösungen, welche zugleich in der ersten der angehängten Tafeln zur leichteren Uebersicht vollständig aufgezeichnet sind.

1ster Fall. Es sind gegeben zwei Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel; also hier, außer dem rechten Winkel, der als das ein für allemal gegebene Element weiter nicht mehr erwähnt wird,

gegeben: Die beiden Katheten P und B; gesucht: 1) p. 2) b. 3) H.

Auflösung.

I. Wenn $P = B = 90°$, so ist: 1) $p = 90°$. 2) $b = 90°$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 2. G.)

II. Wenn $P = 90°$, $B \lesseqgtr 90°$, so ist: 1) $p = 90°$. 2) $b = B$ (an Graden.)
3) $H = 90°$. (§. 29, 4. Geom.)

III. Wenn $P \lesseqgtr 90°$, $B = 90°$, so ist: 1) $p = P$. 2) $b = 90°$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 4. G.)

IV. Wenn weder P noch $B = 90°$ ist.

1) p wird gesucht. Es ist B ein mittleres mit den anliegenden Stücken P und p; also hat man nach der 2ten Neperschen Regel: $\sin tot \cdot \cos B' = \cot P' \cdot \cot p$ d. h. $\sin tot : \tang P = \cot p : \sin B$, welches Prop. 1 in §. 5, 4 ist, und aus dieser, so wie aus dem dort befindlichen durch die Verwechselung der Verhältnisse der Tangenten und Cotangenten aus ihr abgeleiteten, fließen die Gleichungen:

$$\cot p = \sin tot \cdot \sin B : \tang P$$

oder: $\cot p = \sin B \cdot \cot P : \sin tot$

oder: $\tang p = \sin tot \cdot \tang P : \sin B$.

Man hat also die Wahl, aus irgend einer dieser Gleichungen die Cotangente oder Tangente von p zu finden, und mit dieser ergiebt sich zugleich durch Hülfe der trigonometr. Tafeln der gesuchte Winkel selber, wenn man nehmlich verm. §. 29, 5. Geom. entscheidet, je nachdem P kleiner oder größer als 90° ist, ob der kleinere oder größere von den beiden auf die Wahl kommenden, zur gefundenen Function gehörigen Supplementarwerthen, das eigentliche p sei.

2) b wird gesucht und wieder aus Prop. 2 in §. 5, 4 durch eine der in der Tafel verzeichneten Gleichungen und vermöge des Kriteriums in §. 29, 5 Geom. bestimmt.

3) H ergiebt sich, wie schon im Beispiel §. 6, 7 gezeigt worden, aus Prop. 3 in §. 5, 3 durch die in der Tafel befindliche Gleichung und zwar ist es, verm. §. 30, 1 Geom. kleiner oder größer als 90°, je nachdem P und B gleichartig oder ungleichartig sind.

2ter Fall. Gegeben zwei Winkel mit der zwischenliegenden Seite; das will hier sagen:

es ist ein Winkel an der Hypotenuse mit dem ihm anliegenden Katheten gegeben, also:

gege-

gegeben: p und B; gesucht: 1) P, 2) b, 3) H.

oder:

gegeben: b und P; gesucht: 1) B. 2) p. 3) H.

Auflösung.

I. Wenn $p = B = 90°$ so ist: 1) $P = 90°$. 2) $b = 90°$. 3) $H = 90°$.
oder wenn $b = P = 90°$ so ist: 1) $B = 90°$. 2) $p = 90°$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 1 und 2. G.)

II. Wenn $p = 90°$, $B \lesseqgtr 90°$ so ist: 1) $P = 90°$. 2) $b = B$. 3) $H = 90°$.
oder wenn $b = 90°$, $P \lesseqgtr 90°$ so ist: 1) $B = 90°$. 2) $p = P$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 4. Geom.)

III. Wenn $p \lesseqgtr 90°$, $B = 90°$ so ist: 1) $P = p$. 2) $b = 90°$. 3) $H = 90°$.
oder wenn $b \lesseqgtr 90°$, $P = 90°$ so ist: 1) $B = b$. 2) $p = 90°$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 4. Geom.)

IV. Wenn von den Datis p und B oder b und P keines $= 90°$ ist, so werden respective 1) P oder B aus Prop. 1 oder 2 in §. 5, 4 und §. 29, 6 Geom.
2) b oder p aus Prop. 6 oder 4 in §. 5, 3 und §. 29, 5 Geom.
3) H aus Prop. 3 oder 4 in §. 5, 4 und §. 32, 3 Geom. gefunden.

3ter Fall, in welchem alle drei Seiten gegeben sind, bleibt hier der Natur der allgemeinen Kategorie zufolge, bei welcher unter den Datis nothwendig das eine ein rechter Winkel sein muß, gänzlich ausgeschlossen.

4ter Fall. Gegeben alle drei Winkel, also hier:
gegeben: p und b; gesucht: 1) P. 2) B. 3) H.

Auflösung.

I. Wenn $p = b = 90°$ so ist: 1) $P = 90°$. 2) $B = 90°$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 1. G.)
II. Wenn $p = 90°$, $b \lesseqgtr 90°$ so ist: 1) $P = 90°$. 2) $B = b$. 3) $H = 90°$. (§. 29, 4. G.)
III. Wenn $p \lesseqgtr 90°$, $b = 90°$ so ist: 1) $P = p$. 2) $B = 90°$. 3) $H = 90°$. (eb.)
IV. Wenn weder p noch $b = 90°$, so ergeben sich
1) P aus Prop. 4 in §. 5, 3 und §. 29, 6. Geom.
2) B aus Prop. 5 in §. 5, 3 und §. 29, 6. Geom.
3) H aus Prop. 5 in §. 5, 4 und §. 32, 2. Geom.

5ter Fall. Gegeben zwei Seiten mit einem nicht zwischen ihnen liegenden Winkel, das will hier sagen:
es ist ein Kathet und die Hypotenuse gegeben, also:

gegeben: P und H; gesucht: 1) p 2) B. 3) b.

oder:

gegeben: B und H; gesucht: 1) b. 2) P. 3) p.

Auflösung.

Aus §. 38. Geom. ist bekannt, daß unter gegenwärtigen Rubrik gewisse Bedingungen die Aufgabe unbestimmt oder auch völlig überbestimmt machen und diese Bedingungen selbst, so wie diejenigen, bei welchen die Aufgabe völlig bestimmt bleibt, müssen sich hier eben sämmtlich aus jenem Satze erkennen lassen.

I. Wenn $P=H=90°$ so ist: 1) $p=90°$; aber: 2) B und 3) b sind, außerdem, daß sie an Graden gleich sind, völlig unbestimmt. Vermöge §. 38. I. A. Geom. — Desgleichen wenn $B=H=90°$ so ist: 1) $b=90°$; aber 2) P und 3) p zwar an Graden gleich, der absoluten Größe nach jedoch völlig unbestimmt.

II. Wenn $P=90°$, $H\lesseqgtr 90°$ oder: wenn $B=90°$, $H\lesseqgtr 90°$, so ist die Aufgabe überbestimmt und die Quäsite haben keinen möglichen Werth. (§. 38. I. A. G.)

III. Wenn $P\lesseqgtr 90°$, $H=90°$, so ist (verm. §. 38. I. B.) jedes Quäsit unabänderlich bestimmt, nehmlich: 1) $p=P$. 2) $B=90°$. 3) $b=90°$.

oder: wenn $B\lesseqgtr 90°$, $H=90°$ so ist: 1) $b=B$. 2) $P=90°$. 3) $p=90°$.

IV. Wenn von den Datis P und H oder B und H keines $=90°$ ist: so findet (wie sich aus §. 38. II. A und B. Geom. sogleich zeigt), eine Unbestimmtheit oder Vieldeutigkeit der Aufgabe gar nicht statt, sondern sie kann nur entweder überbestimmt oder bestimmt sein, und die Quäsite werden also, vorausgesetzt, daß die dort angegebenen Bedingungen, welche die Aufgabe überbestimmt machen, als unstatthaft wegfallen, sämmtlich völlig entschieden entwickelt; man hat nehmlich:

1) p oder b aus Prop. 1 oder 2 in §. 5, 3 und §. 29, 5. Geom.
2) B oder P aus Prop. 3 in §. 5, 5 und §. 32, 4. Geom.
3) b oder p aus Prop. 4 oder 3 in §. 5, 4 und §. 32, 4. Geom.

6ter Fall. Gegeben zwei Winkel mit einer nicht zwischen ihnen liegenden Seite, das will hier also sagen:

es ist entweder a) ein Winkel mit der Hypotenuse, oder b) ein Winkel mit dem gegenüberstehenden Katheten gegeben, also:

a) gegeben: p und H; gesucht: 1) P. 2) b. 3) B.

oder:

gegeben: b und H; gesucht: 1) B. 2) p. 3) P.

b) gegeben: p und P; gesucht: 1) H. 2) B. 3) b.

oder:

gegeben: b und B; gesucht: 1) H. 2) P. 3) p.

Auflösung.

Die Umstände, welche hier verm. §. 39. d. Sphärengeometrie die Aufgabe unbestimmt oder auch ganz überbestimmt machen können, sind dort, nebst denjenigen, bei welchen die Aufgabe bestimmt bleibt, vollständig aufgezählt und durch jene Nachweisungen muß daher die gegenwärtige Auflösung geleitet werden.

I. a) Wenn $p=H=90°$ oder wenn $b=H=90°$, so ist nur 1) der dem p oder b opponirte Kathet P oder B unabänderlich $=90°$; aber: 2) der Winkel b oder p und 3) der ihm an Graden gleiche gegenüberliegende Kathet B oder P sind ganz unbestimmt (§. 39. I. A. Geom.).

b) Wenn $p=P=90°$ oder wenn $b=B=90°$, so ist nur 1) $H=90°$ unabänderlich; aber: 2) der Kathet B oder P und 3) der an Graden gleiche Gegenwinkel b oder p sind ganz unbestimmt (§. 39. I. B. Geom.).

Wenn $p=90°$, $H \gtrless 90°$ oder wenn $b=90°$, $H \gtrless 90°$, desgleichen

b) wenn $p=90°$, $P \gtrless 90°$ oder wenn $b=90°$, $B \gtrless 90°$, so entspricht überall der überbestimmten Aufgabe kein mögliches Resultat (§. 39. I. C. Geom.).

III. a) Wenn $p \lesseqgtr 90°$, $H=90°$ oder wenn $b \lesseqgtr 90°$, $H=90°$, so ist 1) $P=p$ oder $B=b$. 2) $b=90°$ oder $p=90°$. 3) $B=90°$ oder $P=90°$, also jedes Quäsit unabänderlich bestimmt (§. 39. I. B. Geom.).

b) Wenn $p \lesseqgtr 90°$, $P=90°$ oder wenn $b \lesseqgtr 90°$, $B=90°$ so können die Quäsita der überbestimmten Aufgabe keinen möglichen Werth haben; verm. §. 39. I. C. Geom.

IV. a) Wenn von den Datis p und H oder b und H keines $= 90°$ ist.

Es ist hier H die in §. 39. Geom. mit L bezeichnete Seite, der anliegende Winkel p oder b ist das dortige r, während das dortige l, so oft es $= 90°$ ist, dem hier gegebenen rechten Winkel entspricht, und so zeigt sich aus §. 39. II. C E. F. H. Geom., daß unter gegenwärtigen Umständen die Aufgabe niemals weder unbestimmt noch überbestimmt sein könne, sondern jedesmal müssen die Quäsite in völlig entschiedenen Werthen sich stellen. Nehmlich

1) P oder B aus Prop. 1 oder 2 in §. 5, 3 und §. 29, 5. Geom.

2) b oder p aus Prop. 5 in §. 5, 4 und §. 32, 6. Geom.

3) B oder P aus Prop. 3 oder 4 in §. 5, 4 und §. 32, 6. Geom.

b) Wenn von den Datis p und P oder b und B keines $= 90°$ ist. Jetzt ist P oder B die in §. 39. Geom. mit L bezeichnete Seite, p oder b der dort mit l bezeichnete Winkel, während das dortige r überall wo es $= 90°$ ist, den hier gegebenen rechten Winkel vorstellt. Demnach ist, verm. §. 39. II. D G, die Aufgabe, abgesehen von den Bedingungen, die sie völlig überbestimmt machen, jedesmal zweideutig und die Quäsite können sich daher nur in zwei zugleich möglichen Supplementarwerthen stellen, den einzigen, dort in D, 2 und G, 3 gegebenen Umstand ausgenommen, wenn $l = L$ d. h. hier $p = P$ oder $b = B$ ist, weil sodann für das dortige R d. h. hier für H und somit verm. §. 29, 3. Geom. auch für die andern Quäsite die bisherige Doppelgültigkeit sich in dem einen Mittelwerth von 90° indifferenzirt, wie dieses auch aus §. 31, 2. Geom. constirt. Man hat also:

1) H aus Prop. 1 oder 2 in §. 5, 3 in zwei zugleich möglichen Supplementarwerthen und nur, wenn $p = P$ oder $b = B$, ist bestimmt $H = 90°$, welches sich nicht minder durch die Gleichung, die alsdann $\sin H = \sin \text{tot}$ also $H = 90°$ giebt, offenbare.

2) B oder P aus Prop. 1 oder 2 in §. 5, 4. wie auch 3) b oder p aus Prop. 4 oder 5 in §. 5, 3 in zwei gemeinschaftlich gültigen Supplementarwerthen und wieder nur, wenn $p = P$ oder $b = B$, ist aus den angeführten Gründen, wie auch vermöge der Gleichungen, jedes einzelne Quäsit unabänderlich $= 90°$.

Auflösung aller Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Elementen eines sphärischen Dreiecks ein Quadrant sich befindet.

§. 8.

1. Alles unter der eben verzeichneten Kategorie begriffene läßt sich, nach bekannten Gründen der Sphärengeometrie, nur als Modification dessen, welches zum vorhergehenden Abschnitt gehört, behandeln (§. 34. Geom.). Nennt man nehmlich in einem Quadrantendreiecke, außer dem ursprünglich darin gegebenen Quadranten, welcher dem rechten Winkel des zugehörigen rechtwinkligen Polardreiecks als Supplementarelement entspricht, den dem Quadranten opponirten Winkel: H, die beiden andern Seiten: b und p und die ihnen gegenüberstehenden, dem Quadranten anliegende Winkel: B und P, so daß jedes dieser Elemente mit seinem Supplement im zugehörigen rechtwinkligen Polardreiecke gleich bezeichnet ist, so können begreiflich die Elemente des Quadrantendreiecks, theils weil die Supplementarelemente entweder beide zugleich $= 90°$ sind, theils weil auch zu ungleichen Supplementarelementen dennoch immer gleiche trigonometrische Functionen gehören, nach eben den Regeln und aus denselben Gleichungen, welche für die Entwickelung der gleichnahmigen Elemente in der vorhergehenden Kategorie bestehen, gefunden werden.

2. Auf das bestimmteste erhellt dieses aus dem angeführten §. 34. der Sphärengeometrie, woselbst zugleich die Kriterien, welche hier bei der Entscheidung der jedesmaligen Art des Quäsits ihre Anwendung finden, aufgestellt sind; und die, wie eine vorgenommene kurze Vergleichung alsbald ausweist, sich in nichts von den für das rechtwinklige Dreieck statt findenden Kriterien unterscheiden, als daß, der Natur der Sache gemäß, überall da, wo aus der Gleich- oder Ungleichartigkeit zweier Elemente die Art eines dritten, oder umgekehrt jene aus dieser bestimmt ist, die Prädikate gleichartig und ungleichartig gegen einander vertauscht sind, wenn die Art des bestimmten oder bestimmenden Elements dieselbe bleibt. Wenn z. B. im rechtwinkligen Dreiecke ein gleichartiges b und p ein $H < 90°$ bestimmen und umgekehrt ein $H < 90°$ die Gleichartigkeit zwischen b und p

bestimmt, so wird dagegen im Quadrantendreiecke ein $H < 90°$ durch ein ungleichartiges b und p und umgekehrt ein ungleichartiges b und p durch ein $H < 90°$ bestimmt; und so überall, weil die Art jedes einzelnen Elements im Quadrantendreiecke die entgegengesetzte von der Art des gleichnahmigen Elements im rechtwinkligen Polardreiecke ist, während zugleich, und zwar eben daher, die Gleichartigkeit wie die Ungleichartigkeit zwischen zwei Elementen des einen Dreiecks auch den gleichbenannten des andern bleibt.

3. Man kann also die im vorhergehenden Sphen construirte Tabelle eben sowohl auch zur Auflösung aller in gegenwärtiger Kategorie begriffenen Aufgaben gebrauchen, wenn man darin den Buchstaben die oben S. 1. angegebene Bedeutung giebt und in den beigefügten Kriterien überall ungleichartig statt gleichartig und gleichartig statt ungleichartig setzt.

Da hiemit also der Zweck der Sphärentrigonometrie auch für diese Classe von Aufgaben erreicht ist, so darf dieselbe von jetzt an nur solche Aufgaben berücksichtigen, bei welchen unter den gegebenen Elementen weder ein rechter Winkel noch ein Quadrant sich befindet und die Anweisung zur Auflösung dieser Aufgaben bildet den letzten und gehaltvollsten Abschnitt dieser Wissenschaft.

Auflösung der sämmtlichen Aufgaben, bei welchen unter den gegebenen Elementen eines sphärischen Dreiecks kein rechter Winkel und kein Quadrant sich befindet.

§. 9.

1. In jedem der drei sphärischen Dreiecke, Fig. 28. sind die drei Seiten durch G, L, R und die der Reihe nach gegenüber liegenden Winkel durch g, l, r bezeichnet. Der aus g auf die zur Grundseite genommene G gefällte Perpendikelbogen P liegt bei Fig. 28, a in Folge der Gleichartigkeit der Winkel l und r, innerhalb, bei Fig. 28, b und c hingegen, wegen der Ungleichartigkeit der Winkel l und r, außerhalb des Dreiecks, und zwar ist derselbe in Fig. 28, b zunächst der Seite R, in Fig. 29, c zunächst L herabgelassen. In Fig. 28, a wird daher die Grundseite G selber, in Fig. 28, b und c deren Verlängerung von P in p geschnitten; dabei heißen überall die durch P bestimmten Abscissen: M und N, dergestalt daß die zwischen P und L liegende Abscisse pr durch M, die zwischen P und R liegende Abscisse pl durch N benannt wird. Somit sind zugleich durch P an jedem Dreiecke zwei rechtwinklige bestimmt: in deren einem ist die Hypotenuse L, die Katheten sind M und P und die den letzteren der Reihe nach opponirten Winkel sind m und r, oder statt r, in Fig. 28, c dessen Supplementarwinkel; in dem andern ist die Hypotenuse R, die Katheten sind N und P und die respective ihnen opponirten Winkel sind n und l, oder statt des letzteren in Fig. 28, b dessen Supplementarwinkel. Fig. 28.

2. Hiernächst hat man verm. Prop. 1 und 2 im §. 5, 3

$$\sin \text{tot} : \sin L = \sin r : \sin P$$
$$\sin \text{tot} : \sin R = \sin l : \sin P$$

also: 1) $\sin L : \sin R = \sin l : \sin r$

womit klar ist, daß auch im schiefwinkligen sphär. Dreiecke die Sinus der Seiten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten.

Uebrigens bedarf es kaum einer Bemerkung, daß in der 1ſten Proportion in Beziehung auf Fig. 28, c eigentlich ſtatt sin r der Sinus des Supplements von r oder sin (180° — r), und in der 2ten Proportion eben ſo in Bezug auf Fig. b ſtatt sin l der sin (180° — l) geſchrieben werden ſollte, daß damit aber, weil die Supplementarelemente gleiche trigonometriſche Functionen haben, gar keine Abänderung des Reſultats verbunden iſt. Dieſer Umſtand kann daher, wo er ſich in den folgenden Schlüſſen wiederholt, ganz mit Stillſchweigen übergangen werden.

Es iſt nun ferner verm. Prop. 3 in §. 5, 3

sin tot : cos P = cos M : cos L
sin tot : cos P = cos N : cos R

daher: 2) cos M : cos N = cos L : cos R.

Ferner verm. Prop. 4 und 5 in §. 5, 3

sin tot : cos P = sin m : cos r
sin tot : cos P = sin n : cos l

mithin: 3) sin m : sin n = cos r : cos l.

Weiter iſt den Proportionen 1 und 2 in §. 5, 4 gemäß

sin tot : sin M = tang r : tang P
sin tot : sin N = tang l : tang P

folglich: 4) sin M : sin N = tang l : tang r = cot r : cot l.

Endlich hat man nach Prop. 3 in §. 5, 4

sin tot : cos m = cot P : cot L
sin tot : cos n = cot P : cot R

deshalb: 5) cos m : cos n = cot L : cot R = tang R : tang L.

3. Die ſo eben entwickelten 5 Proportionen müſſen alſo für jedes ſphäriſche Dreieck, welche Seiten deſſelben man auch zur Grundlinie G nehmen und welche Lage der Perpendikelbogen aus der Spitze des gegenüberliegenden Winkels auf G auch erhalten möge, gelten, ſelbſt auch in dem Falle, wenn einer der beiden Winkel r und l ein rechter ſein ſollte, wo mithin der Perpendikelbogen P weder innerhalb noch außerhalb des Dreiecks, ſondern auf die eine oder andere der beiden Seiten L und R fallen wird. Von der 1ſten Proportion iſt dieſes ohne weiteres ſchon klar, weil ſie bereits für das rechtwinklige Dreieck erwieſen iſt. Daß auch die 2te Proportion in demſelben Falle völlig anwendbar ſei, iſt gleichfalls leicht zu überſehen. Setzt man nehmlich, daß r ein rechter Winkel, daß mithin P und L identiſch und M =

M=zero sei, so wird L=P der eine, N=G der andere Kathet, R die Hypotenuse des in r rechtwinkligen Dreiecks, und da, für M=o, der cos M = sin tot, so ist, wenn man statt G und R respective die allgemeinen Zeichen B und H setzt, die Proportion identisch mit der folgenden: sin tot : cos P = cos B : cos H, welches die vollkommen richtige und für diesen Fall gültige Prop. 3 in §. 5, 3 ist. Eben so ist es, wenn l ein rechter Winkel oder N=o sein sollte.

Von der 5ten Proportion erhellt es auf völlig gleiche Weise, daß sie mit Sicherheit auch für den Fall, wenn r oder l ein rechter Winkel sein sollte, zu gebrauchen sei, indem sie alsdann vollkommen wieder mit Prop. 3 oder 4 in §. 5, 4 sich identificirt.

Die 3te und 4te von den obigen Proportionen aber, obgleich sie, wie man leicht sieht, für ein r oder l=90° ebenfalls völlige Consequenz behalten, so daß von ihrem Gebrauch auch in diesem Falle keine fehlerhaften Resultate zu besorgen wären, werden in der Folge niemals unter andern Umständen, als nur solchen, bei welchen man schon zum voraus weiß, daß weder r noch l=90° sei, auf ein sphärisches Dreieck angewandt werden.

So bilden diese 5 Proportionen den Schlüssel zur Auflösung aller unter gegenwärtiger Kategorie begriffener Aufgaben und werden dazu alsbald benutzt werden, nachdem nur noch zu einer gründlichen und erschöpfenden Behandlung der beiden Fälle, wenn aus den drei Seiten die Winkel und umgekehrt aus den drei Winkeln die Seiten gefunden werden sollen, einige unerläßliche Vorrichtungen, welche den Inhalt der beiden zunächst folgenden Sphen abgeben, zu Stande gebracht worden sind.

§. 10.

1. Von zwei ungleichen Bogen oder Winkeln, deren jeder kleiner als 180°, heiße durchgehends der größere α, der kleinere β. Man setze zuerst beide zugleich kleiner als 90°, $df=\alpha$, $de=\beta$ (Fig. 29. a), daß also auch der größere den größeren Sinus fm, der kleinere den kleineren Sinus ek hat. Nachdem cg durch die Mitte der Sehne ef, also senkrecht auf sie gezogen, so ist $eg=fg=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $dg=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, mithin, nach der Verlängerung von ef und cd, bis sie sich in i schneiden, $hi=\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $he=\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, beide für einen und denselben Radius ch. Wird nun auch hl auf cd, eo auf fm senkrecht gezogen, so ist hn : fo = eh : ef = 1 : 2, also $hn=\frac{1}{2}fo$, und da $fo=fm-ek=\sin\alpha-\sin\beta$, so ist $hn=\frac{1}{2}(\sin\alpha-\sin\beta)$; zugleich ist Fig. 29.

$hl = hn + ek = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta) + \sin\beta$, d. h. $hl = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$; mithin hat man, da $hi : he = hl : hn$, auch:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta).$$

Nimmt man $df = \alpha = 90°$ und, wie vorhin, $de = \beta < 90°$, so übersieht man mit Leichtigkeit, daß dem Wesen nach alles so wie oben sei und daß ein völlig gleiches Resultat statt finde.

Setzt man beide Bogen oder Winkel zugleich größer als 90°, so kann (Fig. 29. a) $pqfe = \alpha$ den größeren, $pqf = \beta$ den kleineren darstellen und der größere hat nun den kleineren Sinus ek, der kleinere den größeren Sinus fm. Uebrigens ist wieder $egf = \alpha - \beta$, $eg = fg = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $he = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; zwar ist ferner jetzt $pqfg = pqf + fg = \beta + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; aber da die Supplementarbogen $pqfg$ und dg gleiche Tangenten haben, so ist nichts desto weniger auch jetzt $hi = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und somit hier wieder nach den vorigen Schlüssen:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\beta - \sin\alpha).$$

Wenn man den größeren Bogen α, wie vorhin, $pqfe > 90°$, den kleineren β hingegen $pqf = 90°$ annimmt, so ist klar, daß die Schlüsse und das Resultat dem Wesen nach ganz dieselben, wie unter der vorhergehenden Annahme bleiben.

Unter der Voraussetzung, daß die Winkel oder Bogen ungleichartig sind, sei zuerst in Fig. 29. b, $dgf = \alpha > 90°$, $de = \beta < 90°$, so daß zugleich $\alpha < 180° - \beta$ ist und mithin der größere Winkel oder Bogen auch den größeren Sinus fm, der kleinere den kleineren Sinus ek hat, so ist alles dem Wesen nach ganz wie in dem zuerst betrachteten Falle und auch hier:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta).$$

Es sei zweitens $pfge = \alpha > 90°$, $pqf = \beta < 90°$, so daß jetzt $\alpha > 180° - \beta$, also der größere Bogen den kleineren Sinus ek, der kleinere den größeren Sinus fm hat, so ist im übrigen alles, wie es unter der dritten Voraussetzung war und man hat wieder:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\beta - \sin\alpha).$$

2. Von jeden zwei Winkeln oder Bogen A und B, wenn dieselben ihrer absoluten Größe nach auch noch gar nicht bestimmt sind und es selbst noch unentschieden ist, welcher von beiden der größere oder kleinere sei, läßt sich also, sobald man nur weiß, daß sie ungleich und einzeln kleiner als 180° sind, allemal zum voraus das Gesetz annehmen: daß die Tangente der halben Summe zur Tangente

der halben positiven Differenz sich wie die Summe der Sinus zur positiven Differenz der Sinus dieser Winkel oder Bogen verhalte, oder, wenn das Zeichen ÷ hier, wie es auch in der Folge allemal geschehen wird, in dem Sinne gebraucht wird, daß es die positive Differenz der Größen, zwischen denen es steht, ausdrückt, so daß z. B. $m \div n$ entweder $m - n$ oder $n - m$ bedeutet, je nachdem $m > n$ oder $n > m$ ist, so hat man allemal:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(A \div B) = (\sin A + \sin B) : (\sin A \div \sin B)$$

und dieses Gesetz behält, welches wohl zu beachten, seine Allgemeingültigkeit selbst für den Umstand, wenn der eine von den beiden Bogen oder Winkeln völlig $= 0$ sein sollte, weil, wenn man entweder A oder $B = 0$ setzt, die obige Proportion in die folgende:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} B : \text{tang } \tfrac{1}{2} B = \sin B : \sin B, \text{ oder}$$
$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A : \text{tang } \tfrac{1}{2} A = \sin A : \sin A$$

von unbestrittener Richtigkeit sich verwandelt.

3. Man nehme nochmals von zwei ungleichen Bogen oder Winkeln, die beide einzeln kleiner als 180° sind, α durchgehends als den größeren, β als den kleineren an und bezeichne ihre Complemente mit α' und β', so hat man kraft des eben festgestellten Gesetzes:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta') : \text{tang } \tfrac{1}{2}(\alpha' \div \beta') = (\sin \alpha' + \sin \beta') : (\sin \alpha' \div \sin \beta'), \text{ d. h.}$$
$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta') : \text{tang } \tfrac{1}{2}(\alpha' \div \beta') = (\cos \alpha + \cos \beta) : (\cos \alpha \div \cos \beta).$$

Nun sei zuvörderst sowohl α wie β kleiner als 90°, so ist $\beta' > \alpha'$ und $\cos \beta > \cos \alpha$, daher unter dieser Voraussetzung:
$\text{tang } \frac{1}{2}(\alpha'+\beta') : \text{tang } \frac{1}{2}(\beta' - \alpha') = (\cos \alpha + \cos \beta) : (\cos \beta - \cos \alpha)$; es ist aber ferner $\alpha' + \beta' = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180° - (\alpha + \beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = 90° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, also $\text{tang } \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; desgleichen ist $\beta' - \alpha' = (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$, $\frac{1}{2}(\beta' - \alpha') = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $\text{tang } \frac{1}{2}(\beta' - \alpha') = \text{tang } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; folglich gilt hier die Proportion:

$$\cot \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang } \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = (\cos \alpha + \cos \beta) : (\cos \beta - \cos \alpha).$$

Es sei zweitens sowohl α wie β größer als 90° mithin nun $\alpha' > \beta'$ u. $\cos \alpha > \cos \beta$, also
$\text{tang } \frac{1}{2}(\alpha'+\beta') : \text{tang } \frac{1}{2}(\alpha'-\beta') = (\cos \alpha + \cos \beta) : (\cos \alpha - \cos \beta)$, so ist jetzt ferner $\alpha' + \beta' = (\alpha - 90°) + (\beta - 90°) = \alpha + \beta - 180°$, $\frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 90°$ und $\text{tang } \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \cot \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; desgleichen $\alpha' - \beta' =$

$(\alpha-90°)-(\beta-90°)=\alpha-\beta$ und $\tang\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')=\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, daher bei der jetzigen Annahme:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta):\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\alpha-\cos\beta).$$

Für den Fall, daß α und β ungleichartig sind, also $\alpha>90°$ und $\beta<90°$, sei zuerst $\alpha<(180°-\beta)$, so ist $\beta'>\alpha'$ und $\cos\beta>\cos\alpha$ und man hat

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'):\tang\tfrac{1}{2}(\beta'-\alpha')=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\beta-\cos\alpha);$$

nun ist $\alpha'+\beta'=(\alpha-90°)+(90°-\beta)=\alpha-\beta$ und $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')=\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; ferner $\beta'-\alpha'=(90°-\beta)-(\alpha-90°)=180°-(\alpha+\beta)$, $\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=90°-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\tang\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; folglich hat man bei gegenwärt. Voraussetzung:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta):\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\beta-\cos\alpha).$$

Zweitens sei $\alpha>(180°-\beta)$, so wird $\alpha'>\beta'$ und $\cos\alpha>\cos\beta$, daher $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'):\tang\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\alpha-\cos\beta)$; übrigens ist wieder $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')=\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, und weil $\alpha'-\beta'=(\alpha-90°)-(90°-\beta)=(\alpha+\beta)-180°$, $\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-90°$, so ist auch $\tang\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')=\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, mithin jetzt:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta):\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\alpha-\cos\beta).$$

Endlich sei noch unter der Voraussetzung, daß der eine Winkel oder Bogen völlig $=0$ ist, zuerst $\alpha<90°$, $\beta=0$, so ist $\beta'=90°>\alpha'$ und $\sin\text{tot}=\cos\beta>\cos\alpha$, daß also $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'):\tang\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\beta-\cos\alpha)$ statt findet; weil nun $\alpha'+\beta'=(90°-\alpha)+(90°-\beta)=180°-(\alpha+\beta)$ und $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')=\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; desgleichen $\beta'-\alpha'=(90°-\beta)-(90°-\alpha)=\alpha-\beta$ und $\tang\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, so ist hier eben so wie bei zwei gleichartigen Bogen oder Winkeln:

$$\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta):\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\beta-\cos\alpha).$$

Wenn dagegen $\alpha>90°$ und $\beta=0$ ist, so ist zwar wieder $\beta'=90°>\alpha'$ und $\sin\text{tot}=\cos\beta>\cos\alpha$, daß auch gleichfalls $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'):\tang\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\beta-\cos\alpha)$; aber es ist jetzt $\alpha'+\beta'=(\alpha-90°)+(90°-\beta)=\alpha-\beta$ und $\tang\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')=\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; ferner $\beta'-\alpha'=(90°-\beta)-(\alpha-90°)=180°-(\alpha+\beta)$ und $\tang\frac{1}{2}(\beta'-\alpha')=\cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, weshalb hier, eben so wie bei zwei ungleichartigen Bogen, die Proportion:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta):\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+\cos\beta):(\cos\beta-\cos\alpha)$$

statt findet.

4. Von jeden zwei ungleichen Winkeln oder Bogen A und B, die beide einzeln kleiner als 180° sind, läßt sich also, auch wenn die absolute Größe und das

sonstige Verhältniß derselben noch ganz unbestimmt ist, jedesmal mit Sicherheit folgendes annehmen:

1) Wenn A und B gleichartig sind, so verhält sich die Cotangente ihrer halben Summe zur Tangente ihrer halben positiven Differenz, wie sich die Summe der Cosinus zur positiven Differenz der Cosinus dieser Winkel oder Bogen verhält, oder es ist:

$$\cot \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = (\cos A + \cos B) : (\cos A - \cos B)$$

und dieses Gesetz behält seine Gültigkeit auch dann, wenn der eine Bogen oder Winkel völlig $= 0$, der andere kleiner als $90°$ ist.

2) Wenn A und B ungleichartig sind, so verhält sich die Tangente ihrer halben positiven Differenz zur Cotangente ihrer halben Summe, wie sich die Summe der Cosinus zur positiven Differenz der Cosinus dieser Winkel oder Bogen verhält, oder es ist:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) : \cot \tfrac{1}{2}(A+B) = (\cos A + \cos B) : (\cos A - \cos B)$$

welches auch dann noch gilt, wenn der eine Bogen oder Winkel $= 0$, der andere hingegen größer als $90°$ ist.

3) Für den Fall, wenn einer der beiden Bogen oder Winkel $= 90°$ ist, gilt ohne Unterschied sowohl die 1ste wie die 2te Proportion, der andere Bogen mag kleiner oder größer als $90°$, oder auch $= 0$ sein.

Der Beweis dieser Behauptung ist zwar für den nachmaligen Gebrauch der Proportion nicht erforderlich, weil dieselben immer nur unter solchen Umständen in der Folge angewandt werden, unter denen man zum voraus weiß, daß keiner der beiden Bogen $= 90°$ ist, doch kann derselbe eben so, wie es für die übrigen Voraussetzungen oben geschehen ist, geführt werden; am kürzesten aber läßt er sich sogleich auf folgende Weise darthun.

Man setze den einen der beiden Bogen oder Winkel, z. B. $A = 90°$ und den anderen, B kleiner oder größer als $90°$, so erhält man an der Stelle der 1sten Proportion die folgende: $\cot \frac{1}{2}(90° + B) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(90 - B) = 0 + \cos B : \cos B - 0$, oder: $\cot(45° + \frac{1}{2}B) : \operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}B) = \cos B : \cos B$. Eben so verwandelt sich unter der nehmlichen Annahme die 2te Proportion in diese: $\operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}B) : \cot(45° + \frac{1}{2}B) = \cos B : \cos B$ die Gültigkeit beider Proportionen unter den angegebenen Umständen ist also außer Zweifel, da in der That $\cot(45° + \frac{1}{2}B) = \operatorname{tang}(90° - (45° + \frac{1}{2}B)) = \operatorname{tang}(45° - \frac{1}{2}B)$ ist. — Setzt man den einen Bogen, $A = 90°$, den andern $B = 0$, so erhält man unmittelbar die entschieden richtigen Proportionen: $\cot 45° : \operatorname{tang} 45° = \sin \text{tot} : \sin \text{tot} = \operatorname{tang} 45° : \cot 45°$.

§. 11.

1. Mit der 2ten Proportion in §. 9, 2 hat man bekanntlich zugleich diese:

$$(\cos M + \cos N) : (\cos M \div \cos N) = (\cos L + \cos R) : (\cos L \div \cos R)$$

und diese Proportion muß, gleich derjenigen, aus welcher sie abgeleitet ist, eben sowohl gelten, wenn entweder M oder N in ihr völlig $= 0$ ist (§. 9, 3) als wenn jede dieser Abscissen eine bestimmte Größe über 0 hat. Man kann daher folgende Fälle unterscheiden:

1) Die Abscissen M und N haben beide eine bestimmte Größe über 0 und sind gleichartig.

2) Die eine Abscisse ist $= 0$, die andere kleiner als $90°$.

3) Die Abscissen M und N haben beide eine bestimmte Größe über 0 und sind ungleichartig.

4) Die eine Abscisse ist $= 0$, die andere größer als $90°$.

Um alle Möglichkeiten zu erschöpfen, kann man noch hinzufügen:

5) Die eine Abscisse ist $= 90°$, während die andere kleiner oder größer als $90°$ oder auch völlig $= 0$ sein kann.

2. Wenn aber der 1ste und auch wenn der 2te Fall statt findet, so gilt, vermöge §. 10, 4 folgende Proportion:

$$\cot \tfrac{1}{2}(M+N) : \tang \tfrac{1}{2}(M \div N) = (\cos M + \cos N) : (\cos M \div \cos N).$$

Aber wenn der 1ste Fall gilt, nehmlich wenn M und N gleichartig sind, so sind zugleich, weil bei den in §. 9, 1 umständlich erwähnten rechtwinkligen Dreiecken der Perpendikelbogen P ein gemeinschaftlicher Kathet ist, in Folge des §. 32, 1 Sphärengeometrie, die Seiten L und R, als die Hypotenusen jener Dreiecke, jedesmal gleichartig; und wenn der 2te Fall gilt, nehmlich wenn die eine Abscisse $= 0$ und mit, in das Dreieck glr ein rechtwinkliges ist, in welchem die andere Abscisse $= G$ ein Kathet $< 90°$ ist, so sind wiederum, nach §. 32, 5 Sphärengeometrie, die Seiten L und R ebenfalls gleichartig. Weil also L und R gleichartig sind, es mag der 1ste oder 2te Fall statt finden, so hat man, wieder verm. §. 10, 4 in beiden Fällen auch die Proportion:

$$\cot \tfrac{1}{2}(L+R) : \tang \tfrac{1}{2}(L \div R) = (\cos L + \cos R) : (\cos L \div \cos R).$$

Da aber die letzten Verhältnisse dieser und der vorhergehenden, vermöge der gleich zu Anfang des §phen mitgetheilten Proportion einander gleich sind, so sind es auch die ersten Verhältnisse und sonach findet unter der Voraussetzung des 1sten sowohl wie des 2ten Falls folgende Proportion statt:

$$\cot \tfrac{1}{2}(M+N) : \tang \tfrac{1}{2}(M \div N) = \cot \tfrac{1}{2}(L+R) : \tang \tfrac{1}{2}(L \div R).$$

3. Es gilt ferner, wenn der 3te und eben so auch wenn der 4te Fall statt findet, verm. §. 10, 4 die nachstehende Proportion:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M \div N) : \cot\tfrac{1}{2}(M + N) = (\cos M + \cos N) : (\cos M \div \cos N).$$

Aber wenn der 3te Fall statt findet, nehmlich wenn M und N ungleichartig sind, so sind nach ähnlichen Schlüssen wie vorhin, verm. §. 32, 1 Sphärengeometrie, auch L und R ungleichartig; und wenn der 4te Fall gilt, nehmlich wenn mit der einen zu o gewordenen Abscisse das Dreieck glr ein rechtwinkliges ist, worin die andere Abscisse $= G$ ein Kathet $> 90°$ ist, so sind verm. §. 32, 5 Sphärengeometrie, L und R ebenfalls ungleichartig, und es ist daher unter beiden Voraussetzungen, wegen der jedesmal ungleichartigen L und R, wieder, laut §. 10, 4:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L \div R) : \cot\tfrac{1}{2}(L + R) = (\cos L + \cos R) : (\cos L \div \cos R).$$

Aus dieser, der vorhergehenden und der ganz zu Anfang dieses Syhen befindlichen Proportion ergiebt sich aber:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M \div N) : \cot\tfrac{1}{2}(M + N) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L \div R) : \cot\tfrac{1}{2}(L + R), \text{ oder:}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}(M + N) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M \div N) = \cot\tfrac{1}{2}(L + R) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L \div R)$$

als eine unter der Voraussetzung des 3ten sowohl wie des 4ten Falls statt findende Proportion.

4. Es ist dies aber dieselbe Proportion, welche vorhin auch als unter der 1sten und 2ten Voraussetzung bestehend gefunden wurde; daß eben diese Proportion auch unter der oben angegebenen 5ten Voraussetzung vollkommen anwendbar sei, leidet nach den Bestimmungen in §. 10, 4 keinen Zweifel, wiewohl sie in der Folge immer nur unter Umständen gebraucht werden wird, bei welchen der 5te Fall nicht statt finden kann.

5. Man verwechsele daher, um diese Proportion zum nachmaligen Gebrauch noch bequemer zu machen, die mittleren Glieder derselben und schreibe sodann statt des ersten Verhältnisses der Cotangenten das gleiche umgekehrte der Tangenten, so hat man:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L + R) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M + N) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M \div N) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L \div R)$$

als eine Proportion, von der man nun völlig gewiß weiß, daß sie unter allen Umständen von jedem sphärischen Dreiecke gelten müsse, gleich viel, welches Seitenpaar desselben man auch durch L und R bezeichne, welche Lage auch das aus dem Durchschnittspunct dieser Seiten zur dritten Seite gefällte Perpendikel P, und welche Größe, o nicht ausgeschlossen, die durch letzteres bestimmten Abscissen M und N auch erhalten mögen, vorausgesetzt, daß immer, so wie es §. 9, 1 be-

stimmt worden, die zwischen L und P liegende Abscisse mit M, die zwischen R und P enthaltene mit N bezeichnet werde.

6. Setzt man das sphärische Dreieck glr in l oder r rechtwinklig, also eine der Abscissen, z. B. M=o, während die andere N=G ein Kathet des Dreiecks wird, dessen anderer Kathet L und dessen Hypotenuse R ist, so hat man in obiger Proportion die folgende:

$$\tang \tfrac{1}{2}(L+R) : \tang \tfrac{1}{2}G = \tang \tfrac{1}{2}G : \tang \tfrac{1}{2}(L\div R)$$

also ist $(\tang \frac{1}{2}G)^2 = \tang \frac{1}{2}(L+R) . \tang \frac{1}{2}(L\div R)$

d. h. in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ist die Tangente des einen halben Katheten die mittlere Proportionale zwischen den Tangenten der halben Summe und halben Differenz der Hypotenuse und des andern Katheten: welches der an das rechtwinklige sphärische Dreieck gebrachte, in die trigonometrischen Functionen der Seiten verlarvte Satz des Pythagoras ist. Nennt man nehmlich im geradlinigen rechtwinkligen Dreiecke die Katheten: a und b, die Hypotenuse: h, so ist $a^2 = h^2 - b^2 = (h+b).(h-b)$, d. h. der eine Kathet ist die mittlere Proportionale zwischen der Summe und Differenz der Hypotenuse und des andern Katheten, welches der reine Typus des obigen Satzes ist.

7. Umgekehrt: Wenn in irgend einem sphärischen Dreiecke eine Seite G zur Grundseite genommen wird, dessen beide übrige Seiten mit L und R bezeichnet werden, und es ist $\tang \frac{1}{2}G$ die mittlere Proportionale zwischen $\tang \frac{1}{2}(L+R)$ und $\tang \frac{1}{2}(L\div R)$: so ist das Dreieck ein rechtwinkliges und G in demselben ein Kathet.

Denn wenn man das zu G aus der Spitze des gegenüberliegenden Winkels gefällte Perpendikel, nebst den dadurch bestimmten Abscissen M und N supponirt, so ist entweder G=M+N oder G=M÷N; nächst dem hat man verm. S. 5

$$\tang \tfrac{1}{2}(M+N) . \tang \tfrac{1}{2}(M\div N) = \tang \tfrac{1}{2}(L+R) . \tang \tfrac{1}{2}(L\div R)$$

und zugleich vermöge der Voraussetzung:

$$\tang \tfrac{1}{2}G . \tang \tfrac{1}{2}G = \tang \tfrac{1}{2}(L+R) . \tang \tfrac{1}{2}(L\div R),$$

also: $\tang \frac{1}{2}(M+N) . \tang \frac{1}{2}(M\div N) = \tang \frac{1}{2}G . \tang \frac{1}{2}G.$

Setzt man nun G=M+N, also $\tang \frac{1}{2}G = \tang \frac{1}{2}(M+N)$, so muß zugleich $\tang \frac{1}{2}(M\div N) = \tang \frac{1}{2}G$ und G also auch =M÷N sein; nimmt man hingegen letzteres an, so folgt wiederum auch, daß G=M+N sei. Da nun eine von beiden Voraussetzungen nothwendig statt finden muß, so muß, welche es auch sein mag, jedesmal G=M+N und zugleich G=M÷N sein, welches offenbar nicht an-

anders möglich ist, als wenn entweder M oder N = o und mithin der eine oder der andere von den beiden an G liegenden Winkeln des Dreiecks ein rechter ist.

(Der etwanige Einwurf, daß aus der Gleichheit der Tangenten nicht nothwendig die Gleichheit der zugehörigen Bogen folge, weil zu einer und derselben Tangente verschiedene Supplementarwerthe unter und über 90° gehören, thut hier der Demonstration keinen Eintrag, da G allemal kleiner als 180°, also $\frac{1}{2}G < 90°$ ist; ferner ist, wenn P innerhalb des Dreiecks fällt, auch $M+N=G<180°$ und um so mehr also $\frac{1}{2}(M+N)$, so wie $\frac{1}{2}(M\div N)$ kleiner als 90°, und wenn P außerhalb des Dreiecks zu liegen kommt, so kann es allemal so gefällt werden, daß gleichfalls $M+N$ kleiner oder höchstens eben so groß als 180° (§. 36, 4 u. 18. Geom.), folglich auch jetzt $\frac{1}{2}(M+N)$ und $\frac{1}{2}(M\div N)$ beide kleiner als 90° sind).

8. Mit der Gleich- oder Ungleichartigkeit der Winkel m und n ist die Gleich- oder Ungleichartigkeit der Winkel r und l keinesweges nothwendig gegeben. Man hat übrigens mit der 3ten Proportion in §. 9, 2 zugleich die folgende:

$$(\sin m+\sin n):(\sin m\div\sin n)=(\cos r+\cos l):(\cos r\div\cos l).$$

Es ist nicht nöthig, die Gültigkeit dieser Proportion auch für den Fall, wenn entweder m oder n = o ist, darzuthun, weil ihr Gebrauch künftighin immer nur auf ein wirkliches m und n über o beschränkt bleiben wird.

Vermöge §. 11, 2 ist aber allemal:

$$(\sin m+\sin n):(\sin m\div\sin n)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m+n):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m\div n)$$

folglich auch:

$$(\cos r+\cos l):(\cos r\div\cos l)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m+n):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m\div n).$$

Ferner ist zufolge §. 10, 4

$$(\cos r+\cos l):(\cos r\div\cos l)=\cot\tfrac{1}{2}(r+l):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(r\div l)$$

und auch

$$(\cos r+\cos l):(\cos r\div\cos l)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(r\div l):\cot\tfrac{1}{2}(r+l)$$

jenes, wenn r und l gleichartig, dieses wenn sie ungleichartig sind. Mithin ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m+n):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m\div n)=\cot\tfrac{1}{2}(r+l):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(r\div l),$$

wenn r und l gleichartig sind; — dagegen:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m+n):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m\div n)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(r\div l):\cot\tfrac{1}{2}(r+l)$$

oder: $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m\div n):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(m+n)=\cot\tfrac{1}{2}(r+l):\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(r\div l)$,

wenn r und l ungleichartig sind.

9. Man vertausche daher nur noch in der letzten und vorletzten Proportion die Mittelglieder und substituire sodann dem letzten Verhältniß der Tangenten in beiden das gleiche umgekehrte der Cotangenten, so hat man

$$\tan\tfrac{1}{2}(m+n) : \cot\tfrac{1}{2}(r+l) = \cot\tfrac{1}{2}(r-l) : \cot\tfrac{1}{2}(m-n),$$

so oft r und l gleichartig sind; — und

$$\tan\tfrac{1}{2}(m-n) : \cot\tfrac{1}{2}(r+l) = \cot\tfrac{1}{2}(r-l) : \cot\tfrac{1}{2}(m+n),$$

so oft r und l ungleichartig sind.

10. Hiemit sind zunächst die Vorrichtungen zur Auflösung aller unter die herrschende Kategorie gehörigen Aufgaben geschlossen. Die Proportionen in §. 9, 8 mit Ausnahme der 1sten, und die Proportionen in §. 5 und 8 des gegenwärtigen Sphen, stellen aber nicht Verhältnisse der trigonometrischen Functionen von den Elementen des zu bearbeitenden sphärischen Dreiecks selber dar, sondern die Glieder derselben sind zum Theil nur Functionen von den Elementen solcher rechtwinkligen Dreiecke, die man erst durch eine den Umständen angemessene Fällung eines Perpendikelbogens an dem zu berechneuden Dreiecke entstehen lassen muß. Die Anwendung dieser Proportionen ist daher nicht so unmittelbar, wie derjenigen, welche zur Auflösung der Aufgaben unter den beiden vorhergehenden Kategorien benutzt wurden; sondern man kann nach gehöriger Fällung des Perpendikels größtentheils nur durch zusammengesetzte Operationen das jedesmalige Quäsit mit Hülfe derselben bestimmen, wie dieses durch die Folge unmittelbar am besten klar werden wird. Es werden nehmlich nun nach der allgemeinen Classification des §. 3 in den folgenden Sphen die einzelnen Fälle vollständig durchgegangen und die sämmtlichen Auflösungen sind zugleich in den Tabellen II — VII verzeichnet, so daß zwischen diesen und den nachstehenden Sphen eine wechselseitige Beziehung statt findet. Es bezeichnen dabei durchgehends A, B, C die Seiten des zu bearbeitenden Dreiecks; a, b, c die nach der Reihe diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel, und die Auflösung bei einem jeden Falle hat eine dreifache Abtheilung erhalten, je nachdem nehmlich unter den drei gegebenen Elementen entweder I. gleiche, oder II. supplementarische sich befinden, oder III. keines derselben irgend einem der beiden andern weder gleich noch supplementarisch ist.

§. 12.

Erster Fall.

Gegeben: Zwei Seiten A und B mit dem zwischenliegenden Winkel c.

Gesucht also Die den gegebenen Seiten gegenüberstehenden Winkel a und b und die dritte Seite C.

Auflösung.

I. Wenn A und B gleich groß sind: so supponire man einen aus c auf C gefällten Perpendikelbogen, der das gleichschenklige Dreieck in zwei identische rechtwinklige theilt (§. 26, 3 Sphärengeom.). Alsdann ergeben sich die Winkel a = b nach Nr. 23. der 1sten Tabelle, die Art derselben bestimmt sich durch §. 22, 10 der Sphärengeom. und C findet sich in seiner Hälfte nach Nr. 22. der 1sten Tabelle, indem das dem entwickelten Sinus zugehörige ½ C offenbar jedesmal kleiner als 90° genommen wird, da C < 180° ist. Die hieher gehörigen Formeln und Kriterien giebt die 1ste Abtheilung der 2ten Tabelle.

II. Wenn beide gegebene Seiten supplementarisch sind, also A + B = 180°, und zwar A > 90°, B < 90°: so supponire man aus der Spitze des Winkels c bis an C einen jenen Winkel halbirenden Normalkreisbogen, der mithin ein Quadrant ist, auch C halbirt und das ganze Dreieck in zwei Quadrantendreiecke theilt (§. 35, 9. Geom.). Alsdann hat man den Winkel a = 180° — b und b aus A und ½ c (§. 8), oder, weil die Supplementargrößen A und B gleiche Functionen haben, aus B und ½ c, nach Nr. 9. der 1sten Tabelle durch die in der 2ten Abtheilung der 2ten Tabelle verzeichnete Gleichung, indem aus §. 21, 4 und §. 22, 2 der Sphärengeom. vollkommen klar ist, daß auch a mit b supplementarisch und a > 90°, b < 90° sein müsse.

Die Seite C wird in ihrer Hälfte aus A und ½ c, oder aus B und ½ c nach Nr. 8. der 1sten Tabelle durch die der 2ten Abtheilung der 2ten Tabelle einverleibte Gleichung gefunden, indem das dem entwickelten Cosinus angehörige ½ C < 90° genommen wird, da C < 180° ist.

III. Wenn A und B ungleich und unsupplementarisch sind:

1. Es mögen vorerst in Fig. 28. die Seiten L und G nebst dem zwischenliegenden Winkel r, ohne weiter darauf zu achten, ob L größer oder kleiner als G sei, die gegebenen Elemente vorstellen. Man supponire zur Seite G vor der Oeffnung des Winkels r (§. 25, 7 Geom.), den Perpendikelbogen P, so hat man, gleich viel, P mag, wie in Fig. a, auf G selber, oder, wie in Fig. b, auf der Verlängerung von G zu stehen kommen, die jedesmalige Abscisse M, als einen Katheten des rechtwinkl. Dreiecks grp, aus der Hypotenuse L und dem anliegenden Winkel r nach Nr. 21. der 2sten Tabelle durch eine der folgenden Gleichungen: cot M =

sin tot. cot L: cos r oder: tang M = cos r. tang L: sin tot = sin tot. cos r: cot L. M ist kleiner als 90°, wenn r und L gleichartig, größer als 90°, wenn r und L ungleichartig sind (§. 32, 6 Geom.); es kann nehmlich niemals M = 90° sein, weil dann, der allgemeinen Voraussetzung der Kategorie entgegen, auch L = 90° sein müßte (§. 29, 2 Geom.); es kann auch nicht M = 0 sein, weil sonst P auf L fallen und also, wieder gegen die Voraussetzung, r ein rechter Winkel sein würde.

2. Ist sonach über M entschieden, so hat man alsbald auch N = G ± M, nehmlich N = G − M, wenn M < G, mithin auch P als ein innerer Perpendikelbogen, dagegen N = M − G, wenn M > G, mithin P als ein äußerer Perpendikelbogen befunden ist. Wenn aber, welches allerdings eben sowohl statt haben kann, M = G sich ergeben haben sollte, so ist mithin N = 0, d. h. P ist dann weder ein innerer noch äußerer Perpendikelbogen, er fällt unmittelbar mit der Seite R zusammen und es ist vorläufig dadurch schon l als ein rechter Winkel offenbart. Eben so ist, wenn sich gerade N = G ± M = 90° findet, dadurch vorläufig schon die Seite R als ein Quadrant dargethan (§. 29, 2 Geom.). Es ist aber überhaupt, sobald die Werthe M und N auf die angegebene Weise festgestellt sind, der Zugang zu einer unter allen Umständen völlig entschiedenen Entwickelung des Winkels l und der Seite R vollkommen gewonnen.

3. Man hat nehmlich nun den Winkel l verm. Prop. 4 in §. 9, 2 durch eine der folgenden Gleichungen:

tang l = sin M . tang r : sin N oder: cot l = sin N . cot r : sin M.

Für die Entscheidung der Art von l liefert §. 35, 2 u. 3 d. Geom. das Kriterium: l ist gleichartig mit r, wenn der Perpendikelbogen ein innerer, d. h. wenn M < G gefunden; l ist ungleichartig mit r, wenn P außerhalb des Dreiecks fällt, nehmlich wenn M > G ist. Wenn aber P weder inner- noch außerhalb des Dreiecks, sondern auf R fällt, nehmlich wenn M = G, also N = 0 sich ergeben hat, so weiß man, wie bereits eben bemerkt, ohne weiteres schon, daß l ein rechter Winkel ist, wiewohl die Consequenz der obigen Gleichungen auch ohne jene Reflexion denselben Werth aufdringen würde, indem für N = 0 auch sin N = 0 und bei der Substitution dieses Werths die tang l = ∞ oder cot l = 0 wird, wo die unendlich große Tangente eben so wie die unendlich kleine Cotangente den rechten Winkel unfehlbar zu erkennen giebt. — Mit gleicher Consequenz geben die obigen Gleichungen auch den richtigen Werth von l, wenn sich N = 90° gezeigt hat, nur daß sodann, wie sich von selbst versteht, statt des sin N der sin tot in ihnen substituirt wird, im übri-

gen bleibt die Entwickelung und das Kriterium für die Anzahl der Lösungen dieselben, wie bei jedem andern wirklichen über o liegenden Werthe von N.

4. Die Seite R ergiebt sich vermittelst Prop. 2 in §. 3, 4 aus der Gleichung cos R = cos N . cos L : cos M. Die Art von R, wenn nicht N = o oder N = 90° gefunden, hängt von der Gleich- oder Ungleichartigkeit zwischen N und P ab (§. 3, 1 Geom.), und da P immer von derselben Art, wie r, ist (§. 29, 6 Geom.), so ist folglich R < 90°, wenn N und r gleichartig, und R > 90° wenn N und r ungleichartig sind. — Wenn aber N = o, also l = 90° ist, so ist das zu berechnende Dreieck ein rechtwinkliges, in welchem man aus der Hypotenuse, L, und dem einen Katheten, G = M den anderen, R nach Nr. 14. der 1sten Tabelle durch die Gleichung; cos R = sin tot . cos L : cos M finden könnte; diese Gleichung ist jedoch von der obigen in nichts verschieden, als daß darin, wie es die Natur der Sache von selbst erfordert, der cos N = cos o sich in den sin tot verwandelt hat und in Hinsicht seiner Art ist nun R, so wie allemal P, mit dem es jetzt identisch ist, mit r gleichartig. — Wenn endlich N = 90° gefunden ist, so ist auch, wie schon oben bemerkt worden, R = 90°, ohne weiteres, indeß geht auch dieser Werth aus der obigen Gleichung hervor, da sie, nachdem statt cos N der cos 90. = o in sie eingeführt worden, auch den cos R = o und somit nothwendig R = 90° giebt.

5. Da es in den obigen Entwickelungen unbeachtet bleibt, ob L kleiner oder größer als G ist, so ist klar, daß von den beiden gegebenen Seiten A und B, wenn ein für allemal A die größere, B die kleinere bezeichnet, eben sowohl A durch L und B durch G, als auch umgekehrt B durch L und A durch G vorgestellt werden kann, während, in der einen wie in der andern Lage, der zwischen A und B liegende Winkel durch den obigen r vertreten wird. Um also, der Forderung der Aufgabe gemäß, aus A, B und c den der größeren Seite A opponirten Winkel a, eben so wie den obigen L zu finden, substituire man in der obigen Normalauflösung A für L, B für G, c für r, a für l; um den Gegenwinkel b der Seite B zu entwickeln, muß hingegen B für L, A für G, c für r, b für l eingeführt werden; endlich um die dritte Seite C zu erhalten, kann man begreiflich eben sowohl die erste, wie die zweite Substitution gebrauchen und, sonach, während man in der einen wie der andern Lage, das obige B mit C vertauscht, zwei verschiedene Entwickelungsarten derselben Größe C befolgen.

Auf diese Weise sind die in der 3ten Abtheilung der 1sten Tabelle aufgezeich-

ten Formeln und Regeln gebildet, zu deren Verständniß es mithin nur keiner weitern Nachweisung bedarf, da ein jeder, der dem Bisherigen gefolgt ist, sie alsbald selbst mit Leichtigkeit zu construiren vermag.

§. 15.

Zweiter Fall.

Gegeben: Zwei Winkel a und b mit der zwischenliegenden Seite C.

Gesucht also: Die den Winkeln gegenüberstehenden Seiten A und B und der dritte Winkel c.

Auflösung.

I. Wenn a und b gleich sind: so theilt ein in Gedanken aus c auf C gefällter Perpendikelbogen das gleichschenklige Dreieck in zwei identische rechtwinklige (§. 26, 3 Geom.), und man hat $A = B$ nach Nr. 6. der 1sten Tabelle, das Kriterium der Art aber aus §. 22, 11. Geom. Endlich giebt sich der Winkel c in seiner Hälfte nach Nr. 5. der 1sten Tabelle und $\frac{1}{2}$ c ist bekanntlich immer $< 90°$. Die 1ste Abtheil. der 3ten Tabelle zeigt die hieher gehörigen Formeln und Kriterien.

II. Wenn die gegebenen Winkel supplementarisch sind, nehmlich $a + b = 180°$ und zwar $a > 90°$, $b < 90°$: so ist ein in Gedanken von der Mitte der Seite C bis zur Spitze des gegenüberliegenden Winkels c gezogener Normalkreisbogen ein Quadrant, der auch den Winkel c halbirt und das ganze Dreieck in zwei Quadrantendreiecke zerlegt (§. 35, 9. Geom.), und man hat in dem einen die Seite $A = 180° - B$, in dem andern die Seite B aus a oder b und $\frac{1}{2}$ C nach Nr. 20. der 1sten Tabelle durch die der 2ten Abtheil. der 3ten Tabelle einverleibte Gleichung; indem aus §. 21, 3 und §. 22, 3 der Geom. klar ist, daß A mit B supplementarisch und $A > 90°$, $B < 90°$ sein müsse. Der Winkel c ergiebt sich in seiner Hälfte aus a und $\frac{1}{2}$ C oder aus b und $\frac{1}{2}$ C nach Nr. 19. der 1sten Tabelle durch die gleichfalls in der Tafel verzeichnete Gleichung.

III. Wenn a und b ungleich und unsupplementarisch sind:

1. So mögen zunächst in Fig. 28. die Winkel g und r und die Zwischenseite L, ohne Rücksicht darauf, ob g größer oder kleiner als r sei, die gegebenen Elemente allgemein vertreten. Aus der Spitze des einen Winkels g werde vor der Oeffnung des andern r (§. 25, 7 Geom.), zur Gegenseite G von jenem, der Perpendikelbogen P gefällt, der entweder, wie in Fig. a, auf G selber, oder, wie in Fig. b, auf die Verlängerung von G fallen mag, so hat man doch in jedem Falle

den Winkel m nach Nr. 20. der 1sten Tabelle aus einer der folgenden Gleichungen: tang m = sin tot . cot r : cos L oder cot m = sin tot . cos L : cot r = cos L . tang r : sin tot, und zwar ist m kleiner oder größer als 90°, je nachdem L und r gleichartig oder ungleichartig sind (§. 32, 6. Geom.); daß m nie = 90° sein könne, erhellt daraus, weil sonst, der herrschenden Kategorie entgegen, L = 90° sein müßte (§. 29, 1 Geom.), daß auch m niemals o sein könne, ist klar, weil sonst P auf L fallen, also, gleichfalls gegen die allgemeine Voraussetzung, r = 90° sein würde.

2. Mit m hat man nun auch n = g ± m; ist nehmlich m < g, also n = g − m, so weiß man zugleich, daß P innerhalb des Dreiecks liegt, es fällt dagegen außerhalb desselben, wenn m > g also n = m − g ist. Findet sich aber m = g, so ist n = o, P fällt mithin auf R und es zeigt sich daher sogleich schon der Winkel r als ein rechter. Wird aber in einem der beiden ersten Fälle n = 90°, so offenbart sich daraus wieder im voraus schon die Seite R als ein Quadrant, vermöge §. 29, 1 Geom. Aber auch unter allen andern Umständen müssen, nachdem einmal m und n bestimmt sind, die Elemente R und l ganz unzweideutig der Auflösung sich stellen.

3. Vermöge Prop. 5 in §. 9, 2 hat man nehmlich cot R = cos n . cot L : cos m oder tang R = cos m . tang L : cos n und die Art von R hängt, falls nicht n = o oder n = 90° ist, zunächst von der Gleich- oder Ungleichartigkeit zwischen n und P ab (§. 32, 3 Geom.), oder, da P und r immer von einerlei Art sind (§. 29, 6 Geom.), so ist R < 90°, wenn n und r gleichartig, R > 90°, wenn n und r ungleichartig sind. — Wenn aber n = o mithin l = 90° und das Ganze folglich ein rechtwinkliges Dreieck ist, worin R ein Kathet, L die Hypotenuse und m = g ein ihr anliegender Winkel ist, so hätte man aus den beiden letzteren den ersteren nach Nr. 21. der 1sten Tabelle durch die Gleichungen: cot R = sin tot . cot L : cos m oder: tang R = cos m . tang L : sin tot, welche aber von den obigen in nichts verschieden sind, als daß nur, wie die Umstände es hier von selbst fordern, der cos n = cos o in den sin tot übergegangen ist; und zwar ist sodann R, so wie allemal das mit R jetzt identische P, von einer Art mit r. — Wenn n = 90°, so ist, wie schon oben erinnert worden, auch R = 90°, wiewohl aus dem unmittelbaren Gebrauch der obigen Gleichungen auch dasselbe Resultat hervorgeht, indem sie mit cos n = cos 90° = o die cot R = 0, die tang R = ∞, also R selber = 90° geben.

4. Vermöge Prop. 3 in §. 9, 2 ist $\cos l = \sin n \cos r : \sin m$ und l selber ist gleich- oder ungleichartig mit r, je nachdem das Perpendikel ein inneres oder äußeres, d. h. je nachdem $m < g$ oder $m > g$ gefunden (§. 35, 2 und 3. Geom.). Wenn keins von beiden statt findet, nehmlich $m = g$ und $n = o$ ist, so weiß man schon nach der oben gemachten Bemerkung, daß $l = 90°$ sei, wiewohl auch die vorstehende Gleichung sodann in der Gestalt $\cos l = o$ eben dasselbe zu erkennen giebt. — Hat sich $n = 90°$ ergeben, so ändert dieses offenbar noch weniger im Gebrauch der obigen Gleichung und des Kriteriums, nur daß ganz consequent in jener der Factor $\sin n = \sin 90°$ zum sin tot wird.

5. Da es im obigen ganz gleichgültig ist, ob $g > r$ oder $g < r$ ist, so kann von den beiden gegebenen Winkeln a und b, wenn ein für allemal a den größeren, b den kleineren bezeichnet, eben sowohl a durch g und b durch r, als auch umgekehrt b durch g und a durch r vorgestellt werden, während in beiden Lagen die zwischen a und b liegende Seite C der oben durch L bezeichneten entspricht. Wenn also aus a, b und C zuerst A gefunden werden soll; so darf nur, um es eben so, wie vorhin R, zu entwickeln, in der obigen Normalauflösung überall b für g, a für r, C für L, A für R eingeführt werden; hingegen um B zu finden, wird a für g, b für r, C für L, B für R gesetzt; der Winkel c endlich kann durch die eine Substitution so gut wie durch die andere, also auf zwiefache Weise entwickelt werden, weil in beiden Lagen der obige l demselben entspricht, und so erhält man nach der Reihe die in der 3ten Abtheilung der 3ten Tabelle verzeichneten Formeln und Kriterien für die Quäsite A, B und c.

§. 14.

Dritter Fall.

Gegeben: Alle drei Seiten A, B und C.

Gesucht: Die drei den Seiten der Reihe nach gegenüberstehenden Winkel: a, b und c.

Auflösung.

1. Wenn $A = B$, so theilt ein auf die Basis C aus c gefällter Perpendikelbogen das gleichschenklige Dreieck in zwei identische rechtwinklige (§. 26, 3 Sphärengeom.), und es wird jeder der gleichen Winkel a und b nach Nr. 18. der 1sten Tabelle zugleich unter Zuziehung des Kriteriums §. 22, 10 Geom. bestimmt; den Winkel c hat man in seiner Hälfte nach Nr. 16. der 1sten Tabelle. Die hienach

gebil-

gebildeten Formeln enthält die 1ste Abtheil. der 4ten Tabelle. — Wenn $A=B=C$, so findet man begreiflich den Winkel a des gleichseitigen Dreiecks entweder so wie vorher die Winkel $a=b$, oder man hat das jetzige a in seiner Hälfte, so wie sich vorhin $\frac{1}{2}c$ fand, indem man in der dortigen Formel auch C mit A vertauscht. Auf diese Weise entstehen die in der 1sten Abtheil. der 4ten Tabelle gleichfalls aufgeführten Formeln.

II. Wenn zwei Seiten supplementarisch sind, nehmlich $A+B=180°$ und $A>90°$, $B<90°$, so wird durch einen von dem Durchschnittspunct dieser Seiten bis zur Mitte der dritten Seite C gezogenen Normalkreisbogen der Winkel c halbirt und das ganze Dreieck in zwei Quadrantendreiecke getheilt (§. 35, 9 Geom.). Man hat sodann die Winkel $a=180°-b$ und $b<90°$ aus A oder B und $\frac{1}{2}C$ nach Nr. 12. der 1sten Tabelle (§. 21, 4 und §. 22, 2 Geom.); und den Winkel c in seiner Hälfte aus B und $\frac{1}{2}C$ nach Nr. 10. der 1sten Tabelle, vermittelst der in der 2ten Abtheil. der 4ten Tabelle ausgesetzten Gleichungen.

III. Wenn von den gegebenen Seiten keine einer andern weder gleich noch supplementarisch ist:

1. So nehme man irgend eine derselben als Grundlinie an; sie möge vorläufig allgemein durch G bezeichnet werden (Fig. 28.), und von den beiden anderen werde die längere durch L, die kürzere durch R vorgestellt, daß also auch von den an G liegenden Winkeln der größere durch l, der kleinere durch r vertreten wird (§. 21, 4). Supponirt man einen, aus der Spitze des der Grundseite gegenüberliegenden Winkels g, zu G gefällten Perpendikelbogen P, so kann dieser, entweder wie in Fig. a, innerhalb des Dreiecks fallen, daß sodann jede der gebildeten Abscissen M und N eine bestimmte Größe über o hat und $G=M+N$ ist; oder P fällt außerhalb des Dreiecks, und zwar entweder, wie in Fig. b, vor der Oeffnung des Winkels r, oder, wie in Fig. c. vor der Oeffnung des Winkels l (§. 25, 7 Geom.), wo in beiden Fällen jede Abscisse wieder eine bestimmte Größe über o hat, aber $G=M\div N$ ist; im Fall der Fig. b. nehmlich ist $G=M-N$, in dem der Fig. c. ist $G=N-M$. Oder es kann endlich auch P weder innerhalb noch außerhalb des Dreiecks, sondern entweder auf L oder R fallen; in jenem Falle wird $M=o$, $N=G$; in diesem $N=o$, $M=G$; in beiden Fällen zugleich ist G eben sowohl der Summe als der positiven Differenz der Abscissen gleich.

Uebrigens kann es hier sogleich zum voraus ein für allemal bemerkt werden, daß unter den bestehenden Bedingungen die Abscissen M und N niemals gleich sein

können, wie auch, daß keine derselben $= 90°$ sein könne: denn wenn P innerhalb des Dreiecks liegt, so müssen M und N ungleich sein, weil, wenn sie gleich wären, gegen die Voraussetzung, auch $L = R$ sein müßte (§. 26, 1 Geom.); daß M und N ungleich sind, wenn P außerhalb des Dreiecks liegt, ist an und für sich klar. Ferner kann weder M noch $N = 90°$ sein, weil sonst in den rechtwinkligen Dreiecken gpr, gpl die Seite L oder R, als Hypotenuse ein Quadrant sein müßte (§. 29, 2 Geom.), welches gleichfalls der herrschenden Bedingung zuwider läuft.

Es möge nun von den möglichen, vorhin angeführten Fällen eintreten, welcher da wolle, so ist für jeden derselben, vermöge §. 11, 5 folgende Gleichung gewiß gültig:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M+N).\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M\div N) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L+R).\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L-R).$$

Dividirt man aber das Product der rechten Seite durch einen Factor des Products der linken, so wird der Quotient der zweite Factor des Products zur Linken sein. Da nun entweder $G = M+N$ oder $G = M\div N$, folglich $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}G = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M+N)$ oder $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}G = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M\div N)$ ist, so entwickele man:

$$\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L+R).\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(L-R)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}G} = q$$

und man hat in q entweder die $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M\div N)$ oder die $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(M+N)$. Es werde daher vorläufig q durch $\text{tang}\,\tau$ bezeichnet, wo also τ selbst entweder $\frac{1}{2}(M+N)$ oder $\frac{1}{2}(M\div N)$ bedeutet. — Dieses so eben gefundene $q = \text{tang}\,\tau$ kann nun seiner absoluten Größe nach entweder von dem Divisor $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}G$ verschieden, oder demselben gleich sein.

2. Es sei nun zuerst $q = \text{tang}\,\tau$ von $\frac{1}{2}G$ der Größe nach verschieden, so kann das zu berechnende Dreieck weder in r noch l rechtwinklig sein, weil verm. §. 11, 6 gerade unter diesen Umständen $q = \frac{1}{2}G$ sein müßte; es kann daher auch P weder mit L noch mit R zusammenfallen, sondern es muß entweder innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegen und jede der Abscissen muß eine bestimmte Größe über 0 haben. Mit dem bestimmten Werthe $q = \text{tang}\,\tau$ gehören unterdeß unfehlbar immer zwei Supplementarwerthe zusammen, die man vermöge der trigonometrischen Tafeln zugleich findet; man nimmt aber von beiden jedesmal nur den kleineren, also ein $\tau < 90°$ und zwar aus folgenden Gründen: Wenn nehmlich das Perpendikel ein inneres, mithin $G = M+N$ kleiner als 180° ist, so muß um so mehr τ, welches alsdann $\frac{1}{2}(M\div N)$ ist, kleiner als 90° sein. Wenn dagegen P außer-

halb des Dreiecks, also $G = M \div N$ ist, so kann τ, das jetzt $\frac{1}{2}(M+N)$ ist, allerdings nicht nur kleiner, sondern auch größer als 90° sein, weil die Abscissensumme $M+N$ nun eben sowohl kleiner als größer wie 180° sein kann, je nachdem P auf der einen oder der andern Seite des Dreiecks liegt (§. 56, 4 Geom.); aber eben deshalb, weil hier beides zugleich statt finden kann, nimmt man, um für den noch unausgemittelten Fall, daß P ein innerer Bogen sein möchte, nichts widersprechendes zu setzen; auch jetzt $M+N < 180°$ und $\tau < 90°$ an.

So hat man denn entweder in $\frac{1}{2}G$ die halbe Summe, und in $\tau < 90°$ die halbe Differenz- oder umgekehrt, in $\frac{1}{2}G$ die halbe Differenz, und in $\tau < 90°$ die halbe Summe der beiden Abscissen M und N, und es giebt daher bekanntlich die Summe dieser Größen, nehmlich $\frac{1}{2}G+\tau$ die größere, und die positive Differenz beider, nehmlich $\frac{1}{2}G \div \tau$ die kleinere Abscisse; aber welche Lage jede dieser Abscissen habe, ob die größere oder die kleinere zwischen L und P oder zwischen R und P liege, oder, mit andern Worten, welche von beiden M, welche N sei, ist noch völlig unentschieden. Indessen kann man jetzt schon mit Bestimmtheit die Lage des Perpendikels beurtheilen, nehmlich wenn die Summe der gefundenen Abscissen $= G$ ist, so ist klar, daß P innerhalb des Dreiecks liege und zugleich also auch, daß die Winkel r und l gleichartig seien (§. 35, 2 Geom.); wenn hingegen die Summe der gefundenen Abscissen größer als G ist, so liegt offenbar P außerhalb des Dreiecks und zugleich weiß man sodann die Winkel r und l ungleichartig (§. 35, 3 Geom.), nehmlich r als Oppositum der kleineren Seite R muß spitz, l als Oppositum der größeren L muß stumpf sein (§. 21, 4 Geom.).

3. Wenn auf dem in S. 1. zuletzt erwähnten Puncte der Entwickelung das gefundene $q = \text{tang}\,\tau$ dem Divisor $\text{tang}\,\frac{1}{2}G$ gleich, mithin $\text{tang}\,\frac{1}{2}G$ die mittlere Proportionale zwischen den Factoren des dortigen Dividendus ist, so offenbart sich dadurch unfehlbar das zu berechnende Dreieck als ein rechtwinkliges, verm. §. 11, 7 und man weiß dann sogleich schon, daß P weder innerhalb noch außerhalb des Dreiecks, sondern entweder auf L oder R fallen, daß r oder l der rechte Winkel sein und daß mithin entweder $M = o$, $N = G$, oder umgekehrt, $N = o$, $M = G$ sein müsse. Also auch jetzt ist über die absolute Größe der Abscissen, aber noch nicht über ihre Lage entschieden. Uebrigens sieht man leicht, daß die Entwickelung hier dem Wesen nach unter dieselbe Regel, wie die obige in S. 2. begriffen werden können. Denn indem sich $\text{tang}\,\tau = \text{tang}\,\frac{1}{2}G$ ergeben hat, so ist $\tau < 90° = \frac{1}{2}G$ und es giebt die Summe der Größen $\frac{1}{2}G$ und τ, nehmlich $\frac{1}{2}G+\tau = \frac{1}{2}G+\frac{1}{2}G$ die

größere Abscisse G; und die positive Differenz $\frac{1}{2}G \div \tau = \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}G$ giebt die kleinere Abscisse o, daß also die Consequenz des obigen Verfahrens auch unter den gegenwärtigen Umständen die wahren Resultate herbeiführt.

4. Jetzt also, nachdem unter allen Umständen die absolute Größe der Abscissen bestimmt worden, ist es vor allem erforderlich, auch die Lage derselben auszumitteln, ob nehmlich die größere von ihnen M, die kleinere N, oder ob umgekehrt die größere N, und die kleinere M sei. Diese Entscheidung ist durch die folgende Regel gegeben:

Wenn $(L+R) < 180°$, so ist die größere Abscisse, nehmlich $\frac{1}{2}G + \tau = M$ und die kleinere, nehmlich $\frac{1}{2}G \div \tau$ ist $= N$.

Wenn $(L+R) > 180°$, so ist hingegen die größere Abscisse, nehmlich $\frac{1}{2}G + \tau = N$ und die kleinere, d. h. $\frac{1}{2}G \div \tau$ ist $= M$.

Denn wenn das Perpendikel innerhalb des Dreiecks liegt, so ist die Behauptung unmittelbar durch §. 36, 2 Geom. bestätigt. — Wenn das Perpendikel außerhalb des Dreiecks fällt, so ist bei der obigen Entwickelung allemal derjenige Bogen desselben benutzt, durch welchen zwei Abscissen M und N bestimmt werden, deren Summe kleiner als 180° ist, weil man τ, welches bei einem äußeren Perpendikel $= \frac{1}{2}(M+N)$ ist, durchgehends kleiner als 90°, also $M+N$ kleiner als 180° angenommen hat. So oft nun aber $(L+R) < 180°$ statt findet, so ist der Perpendikelbogen, mit welchem ein Abscissenpaar zusammen gehört, dessen Summe kleiner als 180° ist, selbst kleiner als 90° (§. 36, 4 Geom.), d. h. er liegt, so wie P in Fig. 28, b auf der Seite des stumpfen Winkels l, dem spitzen r gegenüber (§. 35, 3 Geom.), und in dieser Lage ist eben M die größere, N die kleinere Abscisse. — Wenn im Gegentheil $(L+R) > 180°$, so ist der Perpendikelbogen, von dem ein Abscissenpaar, dessen Summe kleiner als 180° ist, bestimmt wird, größer als 90° (§. 36, 4 Geom.), d. h. er liegt, so wie P in Fig. 28, c zur Seite des spitzen Winkels r, dem stumpfen l gegenüber (§. 35, 3 Geom.), und alsdann ist offenbar N die größere, M die kleinere Abscisse. — Wenn endlich das Perpendikel weder innerhalb noch außerhalb des Dreiecks, sondern auf eine der beiden Seiten L oder R fällt, so ist jedesmal, wenn $(L+R) < 180°$, die längere Seite L die Hypotenuse und die kürzere R ist, so wie G, ein Kathet (§. 31, 1 Geom.), daß mithin alsdann der rechte Winkel in l ist und P auf R fällt, folglich $M = G$ die größere, $N = o$ die kleinere Abscisse ist. Wenn hingegen $(L+R) > 180°$, so ist die kürzere Seite R die Hypotenuse, die längere L ist, so wie G, ein Kathet (§. 31, 1 Geom.), also

dann der rechte Winkel in r, P liegt auf L und N=G ist die größere, M=o die kleinere Abscisse.

Nunmehr, nachdem die absolute Größe der Abscissen nicht nur, sondern auch deren Lage unter allen Umständen vollständig erforscht ist, hat man auch entschiedene Gewalt über die beiden an G liegenden Winkel r und l, um jeden von ihnen seiner Größe und Art nach mit Leichtigkeit bestimmen zu können.

5. Da überall in dem rechtwinkligen Dreiecke gpr die Abscisse M ein Kathet und L die Hypotenuse ist, die mit jener den Winkel r, bei Fig. c. den durch die nehmliche Function gegebenen Supplementarwinkel von r, einschließt, so hat man nach Nr. 18. der 1sten Tabelle: cos r = sin tot. cot L : cot M = sin tot. tang M : tang L = cot L. tang M : sin tot und durch irgend eine dieser Gleichungen r selbst auch der Art nach ganz entschieden. Es hat nehmlich entweder

1) jede Abscisse eine bestimmte Größe über o: und wenn alsdann P innerhalb des Dreiecks liegt, nehmlich wenn M+N=G ist, so ist

r<90° wenn M und L gleichartig sind,

r>90° wenn M und L ungleichartig sind, verm. §. 32, 4 Geom.; wenn hingegen P außerhalb des Dreiecks liegt, nehmlich wenn M+N>G ist, so ist von den ungleichartigen Winkeln r und l jedesmal der der kleinern Seite R gegenüberliegende r<90°.

2) Oder eine von beiden Abscissen ist =o: aber wenn M=o ist, so weiß man ohne obige Gleichung schon, daß P auf L fällt und r ein rechter Winkel ist, wiewohl auch jene Gleichung das nehmliche Resultat herbei führt, da sie bei gehöriger Substitution den cos r=o, folglich r selbst = 90° giebt; wenn hingegen N=o ist, also P auf R fällt und R sodann folglich ein Kathet des rechtwinkligen Dreiecks gpr ist, so ist r stets gleichartig mit der Seite R (§. 29, 5 Geom.).

6. Da gleichfalls im rechtwinkligen Dreiecke gpl die Abscisse N ein Kathet und R die Hypotenuse ist, welche mit jener den Winkel l, in Fig. b. den Supplementarwinkel von l, einschließt, so hat man wieder nach Nr. 18. der 1sten Tabelle: cos l = sin tot. cot R : cot N = sin tot. tang N : tang R = cot R. tang N : sin tot; und durch irgend eine dieser Gleichungen l selber, dessen Art auf ganz ähnliche Weise wie die von r entschieden wird. Wenn nehmlich

1) jede Abscisse einen bestimmten Werth über o hat, und P innerhalb des Dreiecks liegt, nehmlich wenn M+N=G ist, so ist

l<90°, wenn N und R gleichartig,

l>90°, wenn N und R ungleichartig sind (§. 32, 4 Geom.);

ſo oft aber P außerhalb des Dreiecks fällt, nehmlich $M+N>G$ iſt, ſo muß, wegen der Ungleichartigkeit der Winkel r und l, jedesmal der der größern Seite L opponirte $l>90°$ ſein.

2) Wenn eine der Abſciſſen $=o$ gefunden, ſo iſt, wenn $M=o$, alſo P auf L fällt und L folglich ein Kathet des rechtwinkligen Dreiecks gpl iſt, l ſtets gleichartig mit L (§. 29, 5. Geom.); wenn $N=o$, ſo iſt ohne weiteres ſchon klar, daß P auf L fällt und l ein rechter Winkel iſt, wiewohl auch dann jede der obigen Gleichungen in dem $\cos l=o$ daſſelbe Reſultat ausſpricht.

7. Da es bei der obigen Auflöſung ganz gleichgültig iſt, welche der drei Seiten zur Grundlinie G angenommen wird, und da in allen Fällen ein jeder der beiden an G liegenden Winkel mit Sicherheit gefunden wird, ſo kann man aus den drei gegebenen Seiten A, B, C, falls von ihnen, wie es oben bedungen worden, keine der andern gleich oder ſupplementariſch iſt, einen jeden von den drei Winkeln finden, wenn man eine von den beiden Seiten, an welchen der geſuchte Winkel liegt, zur Grundlinie nimmt, wo ſodann die längere der beiden andern Seiten der obigen L, die kürzere der obigen R entſpricht, und der Winkel ſelbſt wird nun, je nachdem er der längeren oder kürzeren Seite gegenüber liegt, entweder ſo wie l, oder eben ſo wie r entwickelt; womit zugleich klar iſt, daß man bei jedem Winkel zwiſchen zwei verſchiedenen Entwickelungsarten die Wahl hat, weil man ſowohl die eine als die andere der beiden ihm anliegenden Seiten als Grundlinie benutzen kann. Wenn alſo ein für allemal A die größeſte, B die kleinere und C die kleinſte Seite des Dreiecks bezeichnet, ſo wird

1) um a zu finden, entweder B ſtatt G, A ſtatt L, C ſtatt R, a ſtatt l,
oder C ſtatt G, A ſtatt L, B ſtatt R, a ſtatt l

in der obigen Normalauflöſung gebraucht;

2) um b zu finden, wird entweder A für G, B für L, C für R, b für l,
oder C für G, A für L, B für R, b für r

geſetzt;

3) um c zu finden, wird entweder A für G, B für L, C für R, c für r,
oder B für G, A für L, C für R, c für r

ſubſtituirt.

So entſtehen die zwiefachen, in der 3ten Abtheilung der 4ten Tabelle für die Entwickelung eines jeden Winkels zunächſt ausgeſetzten Formeln und Regeln; die beiden andern Formeln, welche zu eben dem Zweck dort gleichfalls noch verzeichnet

sind, werden am zweckmäßigsten erst weiter unten, im 18ten Ephen, ihre Erläuterung finden.

§. 15.

Vierter Fall.

Gegeben: Alle drei Winkel a, b und c.

Gesucht: Die drei den Winkeln der Reihe nach gegenüberstehenden Seiten A, B und C.

Auflösung.

I. Wenn $a=b$, so theilt ein aus c auf C herabgelassener Perpendikelbogen das gleichschenklige Dreieck in zwei identische rechtwinklige (§. 26, 3 Geom.), jede der Seiten $A=B$ ergiebt sich alsdann nach Nr. 12. der 1sten Tabelle und §. 29, 11 Geom. und die dritte C in ihrer Hälfte nach Nr. 11. der 1sten Tabelle. S. Tab. 5. Abth. 1. — Wenn $a=b=c$, so findet sich offenbar die Seite A des gleichseitigen Dreiecks entweder eben so, wie vorhin $A=B$, oder man hat sie in ihrer Hälfte, wie vorhin die halbe Basis des gleichschenkligen Dreiecks, wenn man in den dortigen Formeln durchgehends a statt b und c setzt. S. gleichfalls Tab. 5. Abth. 1.

II. Wenn zwei Winkel supplementarisch sind, $a+b=180°$ und $a>90°$, $b<90°$, so wird durch einen Normalkreisbogen, der in Gedanken von der Spitze des dritten Winkels, ihn halbirend, bis zur gegenüberliegenden C gezogen wird, auch C halbirt und das ganze Dreieck in zwei Quadrantendreiecke getheilt (§. 35, 9 Geom.). Dann ist $A=180°-B$ und $B<90°$ ergiebt sich aus a oder b und $\frac{1}{2}c$ nach Nr. 15. der 1sten Tabelle (§. 21, 3 u. §. 22, 3 Geom.); die Seite C aber in ihrer Hälfte aus b und $\frac{1}{2}c$ nach Nr. 13. der 1sten Tabelle. S. Tab. 5. Abth. 2.

III. Wenn von den gegebenen Winkeln keiner dem andern gleich oder supplementarisch ist:

1. So werde irgend einer durch g und die ihm entgegenstehende Seite durch G bezeichnet (Fig. 28.), von den beiden andern an G liegenden Winkeln heiße der größere I, der kleinere r, daß also auch die dem I opponirte Seite L die längere, die andere R die kürzere ist (§. 21, 3 Geom.). Man supponire aus der Spitze des Winkels g auf G einen Perpendikelbogen F; dieser fällt entweder, wie in Fig. a, innerhalb des Dreiecks und es wird alsdann $g=m+n$; oder außer-

halb des Dreiecks, und zwar entweder, wie in Fig. b, vor der Oeffnung des kleineren Winkels r, oder, wie in Fig. c, vor der Oeffnung des größeren Winkels l (§. 25, 7 Geom.), und in beiden Fällen wird $g = m \div n$, nehmlich im Fall der Fig. b ist $g = m - n$, in der Lage der Fig. c ist $g = n - m$, indem jedesmal, wie schon §. 9, 1 bestimmt worden, der von P und L eingeschlossene Winkel durch m, der zwischen P und R liegende durch n bezeichnet wird. — Auf eine der Seiten R oder L selber kann P bei dieser Aufgabe niemals fallen, weil sonst auch, gegen die Voraussetzung, der Winkel l oder r ein rechter sein müßte; es kann also auch hier niemals m oder $n = o$ werden, sondern jeder dieser beiden Winkel muß immer eine bestimmte Größe über o haben. Eben so wenig kann bei den bestehenden Bedingungen jemals $m = n$ werden; denn wenn P innerhalb des Dreiecks fällt, so müßte, falls $m = n$ wäre, auch $l = r$ sein (§. 26, 1 Geom.), gegen die Voraussetzung, und wenn P innerhalb des Dreiecks fällt, so ist die Ungleichheit zwischen m und n an und für sich klar. Dagegen ist keinesweges ein Grund vorhanden, der die Möglichkeit, daß einer der beiden Winkel m und n ein rechter sein möchte, aufhöbe und die weitere Entwickelung hat also diese Möglichkeit zu berücksichtigen. Im übrigen weiß man hier immer schon zum voraus, ob P innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt, je nachdem r und l gleichartig oder ungleichartig sind (§. 35, 4 und 5. Geom.).

2. Wenn aber l und r gleichartig sind, so ist verm. §. 11, 9

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m+n) \cdot \cot\tfrac{1}{2}(m \div n) = \cot\tfrac{1}{2}(l+r) \cdot \cot\tfrac{1}{2}(l-r),$$

so daß bei der Division der rechten Seite der Gleichung durch einen Factor der Linken, der andere Factor der Linken der Quotient werden muß. Da nun, wenn l und r gleichartig sind, P innerhalb des Dreiecks liegt und sodann $g = m + n$, also $\text{tang}\,\frac{1}{2}(m+n) = \text{tang}\,\frac{1}{2}g$ ist, so entwickele man

$$\frac{\cot\frac{1}{2}(l+r) \cdot \cot\frac{1}{2}(l-r)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}g} = q = \cot\tau$$

und man hat sodann in $q = \cot\tau$ die $\cot\frac{1}{2}(m \div n)$; man suche daher durch die Tafeln den zur $\cot\tau$ gehörigen Winkel $\tau = \frac{1}{2}(m \div n)$ selber, der hier offenbar immer kleiner als 90° sein und genommen werden muß, da schon $m + n = g < 180°$, $\frac{1}{2}(m+n) < 90°$, also noch viel mehr $\tau = \frac{1}{2}(m \div n) < 90°$ sein muß, und es ist demnächst mit $\frac{1}{2}g$ die halbe Summe und mit $\tau < 90°$ die halbe Differenz der beiden Winkel m und n ausgemittelt, daß nur noch die Addition und Subtraction beider Größen erforderlich ist, um die Winkel m und n selbst zu haben, nehmlich

lich $\frac{1}{2}g+\tau$ giebt den größeren, und $\frac{1}{2}g-\tau$ den kleineren Winkel. Welcher von beiden aber, ob der größere oder kleinere, zwischen P und L oder zwischen P und R liege, oder, mit andern Worten, welcher von beiden gefundenen Winkeln m und welcher n sei, bedarf noch einer, unten beizubringenden Entscheidung.

3. Wenn l und r ungleichartig sind, so ist laut §. 11, 9

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(m\div n).\cot\tfrac{1}{2}(m+n)=\cot\tfrac{1}{2}(l+r).\cot\tfrac{1}{2}(l-r)$$

und da alsdann zugleich P außerhalb des Dreiecks liegt und $g=m\div n$, also $\text{tang}\,\frac{1}{2}(m\div n)=\text{tang}\,\frac{1}{2}g$ ist, so entwickelt man wieder

$$\frac{\cot\frac{1}{2}(l+r).\cot\frac{1}{2}(l-r)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}g}=q=\cot\tau$$

und erhält folglich mit $q=\cot\tau$ die $\cot\frac{1}{2}(m+n)$. Man entnimmt daher aus den trigonometrischen Tafeln den zur $\cot\tau$ gehörigen Winkel $\tau=\frac{1}{2}(m+n)$ selber und zwar von den beiden verschiedenen Supplementarwerthen desselben immer den kleineren oder ein $\tau<90°$. Denn es kann zwar, je nachdem P auf der einen oder andern Seite des Dreiecks liegt, $m+n$ eben sowohl größer als kleiner wie $180°$ (§. 56, 5 Geom.), und somit $\tau=\frac{1}{2}(m+n)$ gleichfalls eben so gut größer als kleiner wie $90°$ sein; aber eben daher, weil beides sein kann, nimmt man, um der Gleichmäßigkeit willen mit dem in S. 2. beobachteten Verfahren und um auf dieser Consequenz allgemein gültige Kriterien zur Bestimmung der Lage der Winkel m und n zu begründen, jedesmal $\tau<90°$ und hat sonach in $\frac{1}{2}g$ die halbe Differenz und in $\tau<90°$ die halbe Summe der genannten Winkel, folglich auch wieder durch $\frac{1}{2}g+\tau$ den größeren, und durch die positive Differenz derselben Größen, nehmlich hier durch $\tau-\frac{1}{2}g$ den kleineren der beiden Winkel m und n, wobei es indeß bis jetzt gleichfalls noch unausgemittelt ist, welcher von beiden eigentlich m, welcher n sei. — Uebrigens bedarf es jetzt kaum noch der Bemerkung, daß der Gang der Entwickelung, hier wo l und r ungleichartig sind, sich von dem in S. 2, für ein gleichartiges l und r, dem Wesen nach in nichts unterscheide, sondern vielmehr mit demselben unter eine gemeinschaftliche Regel begriffen werden könne, wie dieses in der 3ten Abtheilung der 5ten Tabelle geschehen ist.

4. Jetzt also, nachdem unter allen Umständen die absolute Größe der beiden Winkel am Perpendikelbogen entschieden, ist noch die Bestimmung ihrer Lage, ob der größere von ihnen m, der kleinere n, oder ob umgekehrt der größere n, der kleinere m sei, erforderlich. Zu dem Ende bietet sich folgende einfache Regel dar:

Wenn $(l+r)<180°$, so ist der größere, nehmlich der in der Summe der

Größen $\frac{1}{2}g$ und τ gefundene Winkel : m, und der kleinere, in der positiven Differenz derselben Größen gefundene Winkel ist : n.

Wenn $(1+r)>180°$, so ist hingegen der größere Winkel, d. h. die Summe von $\frac{1}{2}g$ und τ jetzt : n, und der kleinere Winkel d. h. die positive Differenz eben der Größen ist nun : m.

Daß dem so sei, wenn P innerhalb des Dreiecks liegt, erhellt unmittelbar aus §. 36, 5 der Sphärengeom. Wenn ferner P außerhalb des Dreiecks fällt, so ist nach den Maßregeln der obigen Entwickelung jedesmal von den beiden Bogen desselben derjenige zum Grunde gelegt, durch welchen zwei Winkel m und n bestimmt werden, deren Summe kleiner als 180° ist, weil man durchgehends $\tau=\frac{1}{2}(m+n)<90°$, also $(m+n)<180°$ angenommen hat. Ist nun auch $(1+r)<180°$, so ist der Perpendikelbogen, durch welchen ein $(m+n)<180°$ bestimmt wird, selbst kleiner als 90° (§. 36, 5 Geom.), d. h. er liegt, so wie P in Fig. 28, b, zunächst des stumpfen, vor der Oeffnung des spitzen Winkels r (§. 35, 5 Geom.), bei welcher Lage eben m der größere, n der kleinere Winkel ist. Wenn hingegen $(1+r)>180°$, so ist das P, mit dem ein $(m+n)<180°$ zusammen gehört, größer als 90° (§. 36, 5 Geom.), liegt also, so wie in Fig. 28, c zunächst des spitzen, vor der Oeffnung des stumpfen Winkels l (§. 35, 5 Geom.), und es ist sodann n der größere, m der kleinere Winkel.

Nachdem hiemit also auch über die Lage der Winkel m und n entschieden ist, so ist man im Besitz aller erforderlichen Vorrichtungen, um eine jede der beiden Seiten L und R ihrer Größe und Art nach mit Leichtigkeit zu bestimmen.

5. Da in dem erchtwinkligen Dreiecke gpr die Seite L die Hypotenuse und m und r, oder bei Fig. c, m und das Supplement von r, die an L liegenden Winkel sind, so hat man L aus m und r nach Nr. 12. der 1sten Tabelle durch eine der folgenden Gleichungen:

$\cos L = \cot r \,.\, \cot m : \sin \text{tot} = \sin \text{tot} \,.\, \cot r : \text{tang}\, m = \sin \text{tot} \,.\, \cot m : \text{tang}\, r$

und welcher von den beiden zum cos L gehörigen Supplementarwerthen der gültige sei, entscheidet sich so:

1) Wenn P innerhalb des Dreiecks liegt, wie in Fig. a, nehmlich wenn l und r gleichartig sind, so ist

$L<90°$, wenn r und m gleichartig,

$L>90°$, wenn r und m ungleichartig sind (§. 32, 2 Geom.).

2) Wenn P außerhalb des Dreiecks liegt, nehmlich wenn l und r ungleichartig sind, und

Wenn dabei $(l+r)<180°$, also die Lage des P so wie in Fig. b ist, so ist wieder $L<90°$, wenn r und m gleichartig

$L>90°$, wenn r und m ungleichartig sind (§. 32, 2 Geom.);

wenn hingegen $(l+r)>180°$, mithin P so wie in Fig. c liegt, daß folglich nicht r, sondern dessen Supplement im Dreiecke gpr an L liegt, so ist L gleichfalls laut §. 32, 2 d. Sphärengeom. kleiner oder größer als 90°, je nachdem das Supplement von r und der Winkel m gleichartig oder ungleichartig sind, d. h. es ist sodann

$L<90°$, wenn r und m ungleichartig,

$L>90°$, wenn r und m gleichartig sind.

Wenn sich $m=90°$ ergeben hat, so ist damit ohne weiteres schon nach §. 29, 2 Geom. $L=90°$, wiewohl auch jede der obigen Gleichungen, welche für diesen Umstand in die Form: $\cos L=o$ übergehen, mit derselben das nehmliche Resultat aussprechen.

6. Da ferner im rechtwinkl. Dreiecke gpl die Seite R die Hypotenuse und m und l, oder bei Fig. b. n und das Supplement von l die anliegenden Winkel sind, so ist nach Nr. 12. der 1sten Tabelle:

$\cos R=\cot l.\cot n:\sin tot=\sin tot.\cot l:tang n=\sin tot.\cot n:tang l$

und die Art von R zeigt sich hier wieder folgendermaßen:

1) Wenn, wie in Fig. a, l und r gleichartig sind, so ist

$R<90°$, wenn l und n gleichartig

$R>90°$, wenn l und n ungleichartig sind (§. 32, 2 Geom.).

2) Wenn l und r ungleichartig sind, und es ist

$(l+r)<180°$, daß mithin P die Lage wie in Fig. b hat, wo nicht l sondern dessen Supplement ein Winkel des Dreiecks gpl ist, so ist mittelbar nach §. 32, 2 Geom.

$R<90°$, wenn l und n ungleichartig,

$R>90°$, wenn l und n gleichartig sind;

wenn dagegen $(l+r)>180°$, mithin P so wie in Fig. c liegt, so ist wieder unmittelbar nach §. 32, 2 d. Geom.

$R<90°$, wenn l und n gleichartig,

$R>90°$, wenn l und n ungleichartig sind.

Wenn $n=90°$ gefunden, so ist damit ohne weiteres wieder nach §. 29, 2 d. Sphärengeometrie auch $R=90°$ gegeben, wie auch jede der obigen Gleichungen zum nehmlichen Resultat führt.

7. Da es völlig frei stand, von den drei Winkeln des Dreiecks, welchen man wollte, als g zu gebrauchen, und da man, nach den obigen Vorschriften unfehlbar immer die beiden, dem Winkel g anliegenden Seiten finden muß, so kann man der Aufgabe, aus den drei gegebenen Winkeln a, b, c jede der drei Seiten zu finden, vollständig genügen, so fern, wie bei der obigen Normalauflösung, keiner der Winkel einem andern gleich oder supplementarisch ist. Es wird nehmlich einer von den beiden der gesuchten Seite anliegenden Winkeln, so wie der obige g behandelt, der größere der beiden übrigen Winkel entspricht sodann dem obigen l, der kleinere dem obigen r und die Seite selbst wird, je nachdem sie dem größeren oder kleineren Winkel gegenüber liegt, so wie L oder so wie R entwickelt, womit es denn natürlich auch, da man von beiden der gesuchten Seite anliegenden Winkeln, den einen so gut wie den andern als g setzen kann, für jede einzelne Seite eine zwiefache Entwickelungsart geben muß. Also, wenn a der größeste, b der kleinere, c der kleinste Winkel ist, so findet man:

1) A, wenn entweder b statt g, a statt l, c statt r, A statt L,
oder wenn c statt g, a statt l, b statt r, A statt L in
der obigen Normalauflösung gesetzt wird.

2) B, wenn g mit a, l mit b, r mit c, L mit B,
oder g mit c, l mit a, r mit b, R mit B, und

3) C, wenn g mit a, l mit b, r mit c, R mit C,
oder g mit b, l mit a, r mit c, R mit C vertauscht wird.

Hiemit haben nun die zwiefachen in der dritten Abtheilung der 5ten Tabelle für die Entwickelung einer jeden Seite zuerst aufgeführten Formeln und Regeln ihre vollständige Nachweisung erhalten, für die beiden andern, dort ebenfalls befindlichen Formeln wird dieses füglich erst unten im 18ten Sphen geschehen.

§. 16.

Fünfter Fall.

Gegeben: Zwei Seiten A und B mit dem nicht eingeschlossenen, der einen Seite B gegenüberstehendem Winkel b.

Gesucht: Der zweite nicht eingeschlossene, der andern Seite A gegenüberstehende Winkel a; der eingeschlossene Winkel c und die dritte Seite C.

Auflösung.

Die Quäsite sind, obgleich die Data der Natur des sphärischen Dreiecks vollkommen entsprechen, hier und in dem folgenden Fall des §. 17, theils ganz unmöglich, theils zweideutig, theils bestimmt, verm. §. 38. Grun.

I. Wenn A = B, so hat man, außerdem, daß bekanntlich a = b ist, c und C in ihrer Hälfte vermöge eines Hülfsperpendikels auf C (§. 26, 3 Geom.), aus A und b nach Nr. 20. und Nr. 21. der 1sten Tabelle durch die in der 1sten Abtheil. der 6ten Tabelle enthaltenen Formeln. — Jedes Quäsit ist nehmlich unter dieser Rubrik, vorausgesetzt daß die Auflösung der Aufgabe nicht schlechthin unmöglich ist, völlig bestimmt. Vergl. Geom. §. 38, 1. III. Kl. 1.

II. Wenn A + B = 180°, so hat man, außerdem, daß bekanntlich a = 180° — b, durch einen von c bis zur Mitte in C gezogenen Normalkreisbogen, weil dieser auch c halbirt und das Dreieck in zwei Quadrantendreiecke zerlege (§. 35, 9 Geom.) c und C in ihrer Hälfte aus A und b nach Nr. 24. und Nr. 23. der 1sten Tabelle, durch die in der 2ten Abtheil. der 6ten Tabelle befindlichen Formeln. — Auch hier ist nehmlich, falls die Auflösung nur nicht geradehin unmöglich ist, jedes Quäsit völlig bestimmt. Vergl. Geom. §. 38, 1. III. Kl. 2.

III. Wenn jede gegebene Seite der andern unsupplementarisch und ungleich ist; so werde zuvörderst der gegebene Winkel ganz allgemein durch r, Fig. 28. ohne alle Rücksicht auf Art und Größe vorgestellt, die gegebene anliegende Seite durch L, die gegenüberstehende mithin durch R, gleichfalls ohne Beachtung der Art und Größe, so daß L hier eben sowohl kleiner als größer wie R möge sein können.

1. Zur Bestimmung des zweiten nicht eingeschlossenen Winkels l, bietet sich hier sogleich, ohne daß man eines Hülfsperpendikels bedarf, die 1ste Proport. in §. 42, 2. dar. Nach derselben ist: sin l = sin L . sin r : sin R. Wenn demnächst der sin l = sin tot gefunden wird, so offenbart sich hiemit unmittelbar der Winkel l als ein rechter; wenn aber sin l von sin tot. verschieden, nehmlich sin l < sin tot gefunden wird, daß mithin die beiden, zu dem gefundenen Sinus gehörigen Supplementarwerthe auf die Wahl kommen, so ist natürlich nur unter den in §. 38. d. Sphärengeom. vollständig ausgemittelten Umständen, bei welchen den Datis nur ein einziges Dreieck und mithin ein bestimmtes l entspricht, eine Entscheidung denkbar und möglich. In allen andern Fällen, sofern übrigens die Aufgabe, wie hier und in der Folge immer vorausgesetzt werden muß, nicht vollends überbestimmt ist, entsprechen derselben zwei verschiedene Dreiecke mit zwei supplementarischen l, welche letztere eben in den beiden mit dem sin l zusammengehörigen Supplementarwerthen gestellt sind und nun, der Natur der Sache nach, einer so gut wie der andere gelten. Es ist also nach der Sphärengeom. §. 38, 3. Unterabth. III. a. lit. b.

$l < 90°$ wenn $r < 90°$ und $R > L$
$l > 90°$ wenn $r < 90°$, $L > 90°$ und $R > (180° - L)$
$l < 90°$ wenn $r > 90°$, $L < 90°$ und $R < (180° - L)$
$l > 90°$ wenn $r > 90°$ und $R < L$.

Unter allen andern Umständen bleibt die Art des Winkels l unentschieden; es sei denn, daß, wie schon oben erwähnt worden, der $\sin l = \sin tot$ gefunden werde, wo nehmlich R ein Perpendikelbogen auf G, d. h. $l = 90°$ ist. Vergl. a. a. O. lit. a.

2. Um den von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkel g zu entwikkeln, wird aus seiner Spitze ein Perpendikelbogen P, vor der Oeffnung des gegebenen Winkels r (§. 25, 7 Geom.), zur gegenüberliegenden Seite G gefällt. Dieser stehe nun, wie in Fig. a. auf G selber, oder, wie in Fig. b, auf deren Verlängerung, so ist immer nach Nr. 20. der 1sten Tabelle:

$$\cot m = \sin tot . \cos L : \cot r = \cos L . \operatorname{tang} r : \sin tot$$

oder $$\operatorname{tang} m = \sin tot \cot r : \cos L$$

und durch irgend eine der vorstehenden Gleichungen ergiebt sich der Winkel m selbst, kleiner oder größer als 90°, je nachdem L und r gleichartig oder ungleichartig sind (§. 32, 6 Geom.); denn es kann weder $m = o$ noch $m = 90°$ sein, weil im ersteren Fall P auf L liegen, also r ein rechter Winkel, im letzteren Fall hingegen (verm. §. 29, 1 Geom.) L ein Quadrant sein würde, welches beides gegen die Voraussetzungen streitet.

Mit m hat man nun auch den andern an P liegenden Winkel n, verm. Prop. 5. in §. 9, 2 durch eine der folgenden Gleichungen:

$$\cos n = \cos m . \cot R : \cot L = \cos m . \operatorname{tang} L : \operatorname{tang} R,$$

auch für den allerdings möglichen Umstand, wenn P auf R fallen, oder, welches dasselbe ist, wenn $n = o$ sein sollte, da die 5te Prop. in §. 9, 2 auch dann gilt, wenn entweder m oder n in ihr $= o$ ist (§. 9, 3). Nehmlich für $n = o$ ist $\cos n = \cos o = \sin tot$, und so oft man durch eine der Gleichungen den $\cos n = \sin tot$ erhält, so ist damit, wie auch die trigonometr. Tafeln unmittelbar zu erkennen geben, $n = o$, also zugleich auch schon $g = m$ gefunden. In allen übrigen Fällen, wenn der $\cos n$ vom $\sin tot$ verschieden, nehmlich $\cos n < \sin tot$ ist, kann eben deshalb n entweder nur kleiner oder größer als 90° sein; denn daß es nicht $= 90°$ sein könne, ist zugleich deshalb klar, weil sonst auch, verm. §. 29, 1 Geom. die Seite R, gegen die Voraussetzung, ein Quadrant wäre. Die jedes-

malige Art des Winkels n bestimmt sich hiernächst so: es ist $n<90°$, wenn P und R gleichartig, $n>90°$, wenn P und R ungleichartig sind (§. 32, 4 Geom.); da nun P stets von eben der Art, wie der Winkel r ist (§. 29, 6 Geom.), so ist $n<90°$, wenn r und R gleichartig, $n>90°$, wenn r und R ungleichartig sind.

Nachdem hiemit m und n unter allen Umständen bestimmt sind, so ist entweder der gesuchte Winkel $g=m+n$, oder $g=m-n$, ersteres, wenn P innerhalb des Dreiecks fällt, d. h. wenn r und l gleichartig sind, letzteres, wenn P außerhalb des Dreiecks fällt, oder, wenn r und l ungleichartig sind (§. 35, 4. und 5. Geom.). Es kann daher natürlich nur ein einziger bestimmter Werth von g statt finden, wenn es einen eben so entschiedenen Werth von l giebt; nehmlich wenn $r<90°$, so ist unter den eben angegebenen Umständen, bei welchen zugleich $l<90°$ ist, $g=m+n$, oder es ist auch, wenn $r>90°$, unter eben den Umständen, bei welchen unfehlbar $l>90°$ ist, $g=m+n$; wenn ferner $r<90°$ und es ist nach jenen Bestimmungen $l>90°$, oder umgekehrt, wenn $r>90°$ und die erwähnten Kriterien geben $l<90°$, so ist $g=m-n$. In allen übrigen Fällen aber, wo keins dieser Kriterien statt findet, indem es zwei ganz verschiedene den Forderungen der Aufgabe entsprechende Dreiecke giebt, von denen das eine ein $l<90°$, das andere ein $l>90°$ enthält, ist auch das Perpendikel bei jenem ein inneres, während es bei diesem ein äußeres ist, oder umgekehrt, und es ist folglich dann auch $m+n$ eben sowohl wie $m-n$ ein gültiger Werth für g. Nur wenn gerade die Seite R ein Perpendikel auf G ist, d. h. wenn P auf R fällt und $n=0$ macht, hat man, wie oben bereits angemerkt worden, für g den einen bestimmten Werth $g=m$.

Es ist nur noch zu merken, daß in zwei besondern Fällen die eben gegebenen Kriterien zur Entscheidung über den Winkel g vereinfacht werden können, nehmlich:

a) Wenn das Perpendikel ein äußeres ist, so ist offenbar $n<m$; so oft also $n>m$ gefunden wird, kann das Perpendikel nur ein inneres sein, oder so oft $n>m$, ist auch $g=m+n$.

b) Wenn das Perpendikel ein inneres ist, so muß, der Natur des eigentlichen sphärischen Dreiecks gemäß, $m+n=g$ stets kleiner als 180° sein; so oft also $m+n>180°$ gefunden wird, kann das Perpendikel nur außerhalb des Dreiecks fallen, d. h. jedesmal wenn $m+n>180°$ ist auch $g=m-n$.

3. Die Seite G wird durch denselben Perpendikelbogen aus den Abscissen M und N eben so gefunden, wie der Winkel g aus m und n. Nach Nr. 21. der 1sten Tabelle ist

cot M = sin tot. cot L : cos r oder tang M = cos r : tang L : sin tot = sin tot. cos r : cot L

und hiemit hat man M selbst, das nach der allgemeinen Voraussetzung und nach §. 29, 2 d. Geom. weder 0 noch 90° sein kann, entweder kleiner oder größer als 90°, je nachdem L und r gleich- oder ungleichartig sind (§. 32, 6 Geom.).

Nächst M hat man verm. Prop. 2 in §. 9, 2

cos N = cos M . cos R : cos L.

und N selber entweder, wie vorhin n, gleich 0, wenn cos N = sin tot gefunden wird, womit dann zugleich G = M offenbart ist, oder N < 90°, wenn r und R gleichartig, N > 90°, wenn r und R ungleichartig sind, eben so wie oben das mit N jedesmal gleichartige n (§. 29, 6 Geom.).

Demnächst ist nach gleichen Schlüssen, wie sie vorhin zur Bestimmung des Winkels g aus m und n galten, G = M + N, so oft N > M ist, oder so oft r und l, in wie fern des letzteren Art aus den oben in §. 1. angegebenen Kriterien bestimmt ist, gleichartig sind; oder G = M — N, so oft M + N > 180°, oder so oft r und l, in wie weit des letzteren Art, durch die obigen Kriterien entschieden ist, ungleichartig sind. In allen übrigen Fällen, wo keine dieser Bestimmungen ihre Anwendung findet, kann eben sowohl G = M + N, als auch G = M — N sein, es sei denn, daß gerade R selbst, als ein Perpendikel auf G, mit P identisch und mithin N = 0 wird, wo erwähntermaßen ganz entschieden G = M ist.

4. Weil man l, g und G, so weit sie nur bestimmbar sind, aus L, R und r, bis auf die bekannten Beschränkungen, ganz allgemein entwickelt hat, so wird man auch aus jeden zwei gegebenen Seiten A und B und einem Winkel b, welcher der einen gegebenen Seite B gegenübersteht, wenn keines dieser Elemente = 90° und die beiden Seiten ungleich und unsupplementarisch sind, über die fehlenden Elemente a, c, C nach der Reihe völlig eben so entscheiden, wie vorhin über l, g und G, und man darf also durchgehends nur L mit A, R mit B, r mit b, l mit a, g mit c, G mit C vertauschen, um die zur Auflösung der Aufgabe erforderlichen, in der 3ten Abtheilung der 6ten Tabelle aufgezeichneten Formeln und Kriterien zu erhalten.

§. 17.

Sechster Fall.

Gegeben: Zwei Winkel b und a mit der nicht zwischenliegenden, dem einen Winkel a gegenüberstehenden Seite A.

Ge-

Gesucht: Die andere nicht zwischenliegende, dem zweiten Winkel b opponirte Seite B, die zwischenliegende Seite C und der dritte Winkel c.

Auflösung.

I. Wenn b=a, so ist bekanntlich auch B=A und C und c werden in ihrer Hälfte vermöge eines Hülfsperpendikels auf C (§. 26, 3 Geom.), aus A und b nach Nr. 21 und Nr. 20. der 1sten Tabelle durch die in der 1sten Abtheil. der 7ten Tabelle befindlichen Formeln (völlig übereinstimmig mit denjenigen der nehmlichen Abtheil. d. 6ten Tab.) entwickelt. Vergl. §. 39, 1. III. Kl. 1. d. Sphärengeom.

II. Wenn b+a=180°, so ist bekanntlich auch B=180°—A und durch einen Hülfsquadranten auf C (§. 35, 9 Geom.) hat man C und c in ihrer Hälfte aus A und b nach Nr. 23 und Nr. 24. der 1sten Tabelle, vermöge der in der 2ten Abtheil. d. 7ten Tabelle ausgesetzten Gleichungen, (übereinstimmig mit denjenigen der nehmlichen Abtheil. der vorhergehenden Tabelle). Vergl. Geom. §. 39, 1. III. Kl. 2.

III. Wenn die gegebenen Winkel ungleich und unsupplementarisch sind: so werde zuerst wieder, in Fig. 28. die gegebene Seite durch L, der anliegende Winkel durch r, der gegenüberstehende durch l ganz allgemein vorgestellt, mit gänzlicher Abstraction von besonderer Art und Größe, daß l eben sowohl größer als kleiner wie r sein kann.

1. Die andere nicht zwischen den gegebenen Winkeln liegende Seite R hat man ohne weitere Vorbereitung sogleich verm. Prop. 1. in §. 9, 2 aus der Gleichung:

$$\sin R = \sin L \cdot \sin r : \sin l$$

in zwei verschiedenen Supplementarwerthen, falls nicht etwa der sin R = sin tot und folglich R=90° gefunden wird. Die Entscheidung zwischen jenen Supplementarwerthen hat natürlich nur einen Sinn in denjenigen Fällen, bei welchen nach den Untersuchungen in §. 39. Geom. nur ein einziges Dreieck, mit einem bestimmten R, der Aufgabe entspricht; wenn hingegen zwei verschiedene Dreiecke mit zwei supplementarischen R ihren Forderungen gleichmäßig Genüge thun, so gelten auch jene zum sin R gehörigen zwei Supplementarwerthe zugleich und bilden sodann schon, ohne weitere Entscheidung eine der Frage der zweideutigen Aufgabe, vorausgesetzt daß sie nicht vollends überbestimmt sei, angemessene Antwort. Es ist mithin nach d. Sphärengeom. §. 39, 3. Abth. III. lit. b.

$R > 90°$ wenn $L > 90°$ und $l < r$
$R < 90$ wenn $L > 90°$, $r < 90°$ und $l < (180° - r)$
$R > 90°$ wenn $L < 90°$, $r > 90°$ und $l > (180° - r)$
$R < 90°$ wenn $L < 90°$ und $l > r$.

Außerdem findet keine Entscheidung statt, wenn nicht etwa l an Graden einem aus g zu G gefälltem Perpendikelbogen gleich, oder, welches dasselbe, wenn nicht gerade der sin R = sin tot gefunden worden, in welchem Falle, wie schon erinnert, R ganz entschieden ein Quadrant ist. Vergl. a. a. O. lit. a.

2. Zur Bestimmung der zwischen den gegebenen Winkeln liegenden Seite G wird auf diese oder ihre Verlängerung vor der Oeffnung des Winkels r (§. 25, 7 Geom.) aus g ein Perpendikelbogen P gezogen, Fig. a und b, so ist nach Nr. 21. der 1sten Tabelle: cot M = sin tot . cot L : cos r oder tang M = cos r . tang L : sin tot = sin tot . cos r : cot L und es ergiebt sich M selbst kleiner oder größer als 90°, je nachdem r und L gleichartig oder ungleichartig sind §. 3, 6 Geom.); denn es kann so wenig M = 0 als M = 90° sein, weil im ersten Fall r = 90°, im zweiten, verm. §. 29, 2 Geom. L = 90°, gegen die Voraussetzung sein würde.

Sodann ist aus der 4ten Proport. in §. 9, 2
sin N = tang r . sin M : tang l = cot l . sin M : cot r:
Daß hiernächst N selbst niemals = 0 sein könne, ist zugleich deshalb klar, da sonst, der Voraussetzung entgegen, l ein rechter Winkel sein müßte; daß aber N = 90° sein könne, ist allerdings möglich und findet natürlich statt, so oft der obige sin N = sin tot gefunden wird, welches sich allemal und nicht anders ereignen wird, als wenn auch sin R = sin tot oder R = 90° ist (§. 29, 2 und 3. Geom.). Ob aber, wenn sin N vom sin tot verschieden, nehmlich sin N < sin tot ist, der kleinere oder größere von den beiden zugehörigen Supplementarwerthen gültig sei, läßt sich nur aus der Gleich- oder Ungleichartigkeit zwischen l und R beurtheilen (§. 32, 6. Geom.), folglich ist hier die Art von N auch nur dann bestimmt, wenn es nach den obigen Kriterien eine bestimmte Art von R giebt, und überall, wo es in zwei zugleich möglichen Dreiecken zwei verschiedenartige R giebt, da wird es mit denselben zugleich auch zwei verschiedenartige N geben.

Es ist nun entweder die gesuchte Seite G = M + N, wenn r und l gleichartig sind, oder G = M — N, wenn r und l ungleichartig sind (§. 33, 4 und 5. Geom.); also hat man, wo es ein bestimmtes R und mit demselben folglich ein bestimmtes N giebt, auch nur ein einziges G; wo aber zwei R und mithin auch zwei N möglich

sind, da sind auch zwei G gültig, indem man entweder zwei verschiedene N zu M addiren, oder davon subtrahiren muß.

3. Um den dritten Winkel g zu entwickeln, wird derselbe Perpendikelbogen, wie vorher, beibehalten, und es ist nach Nr. 10. der 1sten Tabelle: cot m = sin tot . cos L : cot r = cos L . tang r : sin tot, oder tang m = sin tot . cot r : cos L, womit m selbst kleiner oder größer als 90° gefunden ist, je nachdem r und L gleichartig oder ungleichartig sind (32, 6 Geom.); o und 90° kann m eben so wenig wie M sein.

Hierauf giebt die 3te Proport. in §. 9, 2.

sin n = sin m . cos l : cos r.

n ist hier eben so wenig wie N jemals o, aber es kann eben sowohl wie jenes = 90° sein, so oft nehmlich sin n = sin tot gefunden wird; außerdem gilt von den beiden zum sin n gehörigen Supplementarwerthen der kleinere oder größere, je nachdem l und R gleichartig oder ungleichartig sind (§. 32, 6. Geom.), in so fern die Art von R nach den bekannten Kriterien bestimmbar ist; in allen übrigen Fällen hat man hier eben so zwei zugleich gültige n, wie es zwei verschiedene N giebt.

Demnächst ist g = m + n oder g = m — n, je nachdem r und l gleichartig oder ungleichartig sind (§. 35, 4 u. 5. Geom.), und überall, wo R und G jedes seinen bestimmten Werth haben, giebt es auch nur ein bestimmtes g; wo aber jene Elemente einen Doppelwerth haben, da thun auch gleichmäßig zwei verschiedene g den Forderungen der Aufgabe Genüge.

4. Da R, G und g aus den Datis r, l und L, ohne etwas anderes, als die ausdrücklich genannten Bedingungen vorauszusetzen, entwickelt sind, so werden sich auch aus jeden zwei Winkeln b und a und der dem einen a opponirten Seite A, falls keines dieser Elemente = 90° ist und die gegebenen Winkel b und a ungleich und unsupplementarisch sind, die fehlenden Stücke B, C und c nach der Reihe eben so wie R, G und g bestimmen lassen, und man hat nur nöthig, überall L mit A, r mit b, l mit a, R mit B, G mit C und g mit c zu vertauschen, um die zur Auflösung der Aufgabe gehörigen, in der 3ten Abtheilung der 7ten Tabelle befindlichen Gleichungen und Regeln zu erhalten.

§. 18.

1. Die bisherigen Auflösungen der unter der herrschenden Kategorie begriffenen Aufgaben haben das gemeinschaftlich, daß sie die Quäsite durchgehends vermöge

eines Hülfsperpendikels oder eines Hülfsquadranten construiren. Da, wo gleiche oder supplementarische Data vorkommen, läßt diese Methode an Einfachheit und Kürze nichts zu wünschen übrig, wenn aber die Data ungleich und unsupplementarisch sind, so führt sie besonders bei den Aufgaben in §. 14 und §. 15., wenn aus den drei Seiten die Winkel, und umgekehrt, diese aus jenen gefunden werden sollen, zwar vollkommen sicher, aber nur mit beträchtlicher Umständlichkeit zum Zwecke. Es darf daher, wenn im bisherigen Vortrage die gegebenen Auflösungen der Aufgaben in §. 14 und 15., um der Gleichmäßigkeit und Vollständigkeit willen und schon als lehrreiche Beispiele sinnreicher mathematischer Compositionen, ihre gehörige Stelle finden mußten, jetzt um so weniger eine andere Methode übergangen werden, nach welcher man die nehmlichen Aufgaben auch ohne den Gebrauch des Perpendikels eben so entschieden, als nach dem früheren Verfahren, aufzulösen vermag. Die Demonstration dieser Auflösung, welche in den folgenden Abtheilungen des gegenwärtigen Sphen gegeben wird, wird jedoch nicht, wie gewöhnlich, bloß aus analytischen Operationen, sondern so wie die früheren Beweise, zuvörderst aus geometrischen Principien abgeleitet, und erst in der Folge (§. 23, 2 und 3), wird die Darstellung auf einem bloß analytischen Wege auf dieselben Resultate zurückkommen.

Fig. 30. 2. Es sei in dem ungleichseitigen sphär. Dreiecke glr keine Seite weder ein Quadrant noch das Supplement einer andern. Nachdem willkührlich eine Seite rl zur Grundseite G angenommen, verlängere man von den beiden übrigen die kürzere R=gl, bis ga gleich der längeren L=gr wird, nehme ferner auf der Verlängerung von R den Bogen bal=G=abd und ziehe aus dem Sphärencentro c nach der Mitte von labd den Radius ce: so ist al=bd=L−R; aeb=bl−al =G−(L−R)=G+R−L und ea=½(G+R−L)=½(G+R+L)−L, oder wenn man ½(G+R+L) durch P bezeichnet, so ist ea=P−L; endlich ist labd=abd+al=G+L−R und el=½(G+L−R)=½(G+L+R)−R oder el=P−R. — Uebrigens ist klar, daß bal=G stets größer als al=L−R sein (§. 18, 1. Geom.), daß mithin der Punct b, so wie in der Figur, jedesmal über a hinaus fallen müsse.

3. Man nehme auf L den Bogen rf=al, ziehe die Normalkreisbogen fhl, ria, rkb und die geradlinigen Sehnen fl, ra, rb, ab, ld, so schließen letztere zwei ebene geradlinige Dreiecke fld, bar ein, und:

dieses Dreiecke sind einander ähnlich.

Denn es sind erstens die Winkel dlf und rab gleich, weil die Sehnen fl und ra parallel sind, verm. §. 26, 6 d. Sphärengeom. und weil, wegen der Gleichheit der

Bogen al, bd, auch die Sehnen ld und ab parallel sind. Zweitens sind auch die Winkel lfd und abr einander gleich, welches folgendermaßen erhellt.

Die Ebenen beider Dreiecke sind parallel, weil die Schenkel der zuerst genannten Winkel dlf, rab parallel sind; wenn also durch die Winkelspitzen r, a, b und d, l, f zwei Sphärenkreise beschrieben werden (§. 27, 5. Geom.), so sind sie Parallelkreise, die gemeinschaftliche Pole haben (§. 7, 2. Geom.). Ueberdies ist, weil bal = G genommen, das sphärische Dreieck rlb gleichschenklig und die Basis rkb desselben zugleich eine Sehne auf der Sphäre in dem um das Dreieck bar beschriebenem Sphärenkreise; es wird folglich ein aus der Spitze l des gleichschenkligen Dreiecks rlb auf dessen Basis rkb gefälltes Perpendikel die letztere nicht nur halbiren (§. 26, 3. Geom.), sondern eben deshalb auch durch den Pol jenes letzt genannten Sphärenkreises (§. 27, 3 Geom.), somit also auch durch den Pol des andern, um das Dreieck fld beschriebenen Sphärenkreises gehen, und da es von letzterem zugleich in l durchschnitten wird, so wird eine durch l an eben den Sphärenkreis gezogene Tangente mn mit der geradlinigen Chorde br der Basis rkb des gleichschenkligen Dreiecks rlb parallel sein, vermöge §. 26, 7 der Sphärengeometrie. Da nun außer mn und br zugleich noch ld und ab parallel sind, so ist der Winkel nld = dem Winkel abr; aber die Winkel nld und lfd sind nach dem 22sten Satze im 3ten Buche des Euklides einander gleich: folglich ist auch der Winkel lfd = dem Winkel abr und hiemit endlich die Aehnlichkeit der Dreiecke fld, bar außer Zweifel.

4. Vermöge dieser Aehnlichkeit ist fl : dl = ab : ar

und $\frac{1}{2}$fl : $\frac{1}{2}$dl = $\frac{1}{2}$ab : $\frac{1}{2}$ar.

Man supponire noch ein aus der Spitze g der gleichschenkligen Dreiecke fgl, rag zur Basis gezogenes Perpendikel gi, das den Winkel bei g und beider Grundlinien halbirt, so lassen sich den Gliedern der letzten Proportion nach der Reihe folgende trigonometrische Functionen substituiren: $\frac{1}{2}$fl ist der Sinus des halben Bogens fkl oder $\frac{1}{2}$fl = sin hl;

$\frac{1}{2}$dl = lp = sin el = sin (P − R); (§. 2)

$\frac{1}{2}$ab = aq = sin ea = sin (P − L); (§. 2)

$\frac{1}{2}$ar = sin $\frac{1}{2}$ria = sin ri; also hat man

sin hl : sin (P − R) = sin (P − L) : sin ri

und sin hl . sin ri = sin (P − R) sin (P − L).

5. Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken ghl, gir nach der 1sten Propert. in §. 5, 3

$\sin tot : \sin R = \sin \frac{1}{2} g : \sin hl$

$\sin tot : \sin L = \sin \frac{1}{2} g : \sin ri$

und durch die Zusammensetzung dieser beiden Proportionen ergiebt sich die folgende:

$\sin tot^2 : \sin R . \sin L = (\sin \frac{1}{2} g)^2 : \sin hl . \sin ri;$

folglich hat man, wenn man dem letzten Gliede dieser Proportion das ihm gleiche Product aus S. 4 substituirt:

$\sin tot^2 : \sin R . \sin L = (\sin \frac{1}{2} g)^2 : \sin (P-R) . \sin (P-L)$

hieraus sodann:

$(\sin \frac{1}{2} g)^2 = \sin tot^2 . \sin (P-R) . \sin (P-L) : (\sin R . \sin L)$

und endlich

$\sin \frac{1}{2} g = \sin tot . \sqrt{(\sin (P-R) . \sin (P-L) : (\sin R . \sin L))}.$

6. Da es völlig gleichgültig war, welche Seite des Dreiecks man als Grundseite G setzte und welchen Winkel man folglich g nannte, so hat die vorstehende Formel einen ganz allgemeinen Sinn, der in Worte gefaßt so heißt:

Man nehme die halbe Summe (P) aller drei Seiten des Dreiecks, subtrahire davon einmal die kleinere und sodann auch die größere der dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten, dividire das Product der Sinus dieser beiden Differenzen durch das Product der Sinus jener beiden, dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten und multiplicire die Quadratwurzel des Quotienten mit dem Sinustotus: so hat man den Sinus des halben gesuchten Winkels.

Mit diesem giebt sich also die Hälfte des gesuchten Winkels, die, weil der ganze kleiner als 180°, stets kleiner als 90° genommen wird, und aus der Hälfte endlich der ganze Winkel unmittelbar selber.

Hienach bestimmt sich die Modification der Formel für jeden der drei Winkel a, b, c aus den drei ungleichen Seiten A, B, C, so wie sie in der 3ten Abtheil. der 4ten Tabelle überall eingetragen ist, von selbst, ohne daß es noch einer weiteren Erläuterung bedarf.

7. Man verlängere in Fig. 30. die Seiten L und G bis sie sich von neuem in s schneiden und mithin ein Seitendreieck des vorigen bilden, worinn die Seiten: $180° - L$, R und $180° - G$ sind, deren halbe Summe $= \frac{1}{2}(360° - L - G + R)$ ist. Man verfahre nun, um den Winkel u zu finden, nach der so eben im vorhergehenden Satze gegebenen allgemeinen Vorschrift. Es ist nehmlich die Differenz der Halbsumme u. der dem Winkel n anliegenden Seite R folgende: $\frac{1}{2}(560° - L - G + R) - R = \frac{1}{2}(360° - L - G - R) = 180° - \frac{1}{2}(L + G + R) = 180° - P$, wenn P, so wie vorhin, die Halbsumme der Seiten L, R, G des ursprünglichen Dreiecks bezeichnet,

und der Sinus dieser Differenz ist: $\sin(180° - P) = \sin P$, da bekanntlich Supplementargrößen gleiche trigonometrische Functionen haben. — Ferner ist die Differenz der Halbsumme u. der 2ten anliegenden Seite, $180° - L$, folgende: $\frac{1}{2}(360° - L - G + R) - \frac{1}{2}(360° - 2L) = \frac{1}{2}(L - G + R) = \frac{1}{2}(L + G + R) - G = P - G$ und der Sinus dieser Differenz ist also: $\sin(P - G)$. Hienach ist denn:

$$\sin\tfrac{1}{2}u = \sin tot . \sqrt{((\sin P . \sin(P - G)) : (\sin R . \sin(180° - L))}.$$

Es ist aber $u + g = 180°$ und $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}g = 90°$, folglich $\sin\frac{1}{2}u = \cos\frac{1}{2}g$; wenn man also diesen Werth in vorstehender Formel substituirt und zugleich im Divisor unter dem Wurzelzeichen statt des $\sin(180° - L)$ den völlig gleichen $\sin L$ setzt, so hat man in:

$$\cos\tfrac{1}{2}g = \sin tot . \sqrt{(\sin P . \sin(P - G)) : (\sin R . \sin L)}$$

eine noch etwas einfachere Formel, um g in seiner Hälfte aus dem Cosinus zu finden.

8. Diese Formel ist natürlich von einem eben so allgemein gültigen Gebrauch, wie die vorige und spricht, wenn aus den drei ungleichen Seiten A, B, C irgend ein Winkel gefunden werden soll, die folgende Vorschrift aus:

Man nehme den Sinus der halben Summe aller drei Seiten und den Sinus eben der, um die, dem gesuchten Winkel gegenüberliegende Seite verminderten Halbsumme, dividire das Product dieser beiden Sinus durch das Product aus den Sinus der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten und multiplicire die Quadratwurzel des Quotienten mit dem Sinustotus: so hat man den Cosinus des halben gesuchten Winkels.

Hierauf gründen sich die letzten der in der 3ten Abtheil. der 4ten Tabelle für die Winkel a, b, c ausgesetzten Formeln und es ist demnach auch für diese die erforderliche Nachweisung hiemit gegeben.

9. Um nun auch für die Auflösung der Aufgabe: aus den drei Winkeln die Seiten zu finden, ähnliche Formeln zu construiren, sehe man im Dreiecke glr die ungleichen Winkel g, l, r als bekannt, die Seiten G, L, R als unbekannt an, supponire hienächst das zu glr gehörige Polardreieck, dessen Seiten nach der Reihe die Supplemente der gegebenen Winkel, nehmlich $180° - g$, $180° - l$, $180° - r$, dessen Winkel eben so die Supplemente der gesuchten Seiten, nehmlich $180° - G$, $180° - L$, $180° - R$ sind, und leite nun unmittelbar nach den allgemeinen Vorschriften im 6ten und 8ten Satze dieses Syphen aus den bekannten Seiten des Polardreiecks Ausdrücke für die Winkel desselben her, die sich alsdann mit Leichtigkeit zu eben so allgemein gültigen Formeln für die Entwickelung der Seiten des ursprünglichen Dreiecks umschaffen lassen, da diese die Supplemente der Winkel des Polardreiecks sind.

Um also die Seite G aus den Winkeln g, r, l zu bestimmen, wird der Winkel $180° - G$ des Polardreiecks bestimmt, welcher in letzterem der Seite $180° - g$ entgegen steht und von den Seiten $180° - l$, $180° - r$ eingeschlossen ist. Die Halbsumme aller Seiten dieses Polardreiecks ist $\frac{1}{2}(540° - g - l - r) = 270° - \frac{1}{2}(g + l + r) = 270° - p$, wenn man $\frac{1}{2}(g + l + r)$ d. i. die halbe Summe der Winkel des ursprünglichen Dreiecks mit p bezeichnet.

10. Verfährt man nun nach S. 6. so werden zuerst von jener Halbsumme die dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten abgezogen und die Sinus der Differenzen genommen. Es ist also $270° - p - (180° - r) = 90° - (p - r)$ und der zugehörige Sinus: $\sin(90° - (p - r)) = \cos(p - r)$; desgleichen ist $270° - p - (180° - l) = 90° - (p - l)$ und $\sin(90° - (p - l)) = \cos(p - l)$.

Weiter ist das Product dieser Sinus, d. h. $\cos(p - r) . \cos(p - l)$ durch das Product aus den Sinus der dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten, also durch $\sin(180° - r) . \sin(180° - l)$ d. h. durch $\sin r . \sin l$ zu dividiren, und die Quadratwurzel aus dem Quotienten: $\cos(p - r) . \cos(p - l) : (\sin r . \sin l)$ mit dem sin tot multiplicirt, giebt den Sinus des halben gesuchten Winkels, nehmlich den $\sin \frac{1}{2}(180° - G) = \sin(90° - \frac{1}{2}G)$ d. h. den $\cos \frac{1}{2}G$; man hat also mit

$$\cos \tfrac{1}{2}G = \sin \text{tot} . \sqrt{(\cos(p - r) . \cos(p - l) : (\sin r . \sin l))}$$

eine allgemeine Formel, in der sich unfehlbar die Vorschrift, wie überhaupt aus drei ungleichen Winkeln a, b, c jede der drei Seiten A, B, C gefunden wird, folgendermaßen ausspricht:

Von der Halbsumme der drei Winkel subtrahire sowohl den kleineren als den größeren der an der gesuchten Seite liegenden Winkel, dividire das Product der Cosinus dieser beiden Differenzen durch das Product der den genannten Winkeln zugehörigen Sinus und multiplicire die Quadratwurzel dieses Quotienten mit dem Sinustotus; so entsteht der Cosinus der halben gesuchten Seite.

Dem gemäß sind die vorletzten Formeln der 5ten Abtheilung der 5ten Tabelle für die Seiten A, B, C nach der Reihe gebildet.

11. Verfährt man hingegen nach Maßgabe des 8ten Satzes, so nimmt man zuerst den Sinus der Halbsumme der Seiten des Polardreiecks, also $\sin(270° - p) = \sin(180° - (p' - 90°)) = \sin(p - 90°) = \cos p$; sodann den Sinus derselben Halbsumme, nachdem von ihr die dem gesuchten Winkel opponirte Seite abgezogen worden, mithin $\sin(270° - p - (180° - g)) = \sin(90° - (p - g)) = \cos(p - g)$; das Product beider wird, so wie oben, durch $\sin r . \sin l$ divi-

dividirt und die Quadratwurzel des Quotienten $\cos p \cdot \cos(p-g) : (\sin r \cdot \sin l)$ mit sin tot multiplicirt, giebt den Cosinus des halben gesuchten Winkels, also den $\cos \frac{1}{2}(180° - G) = \cos(90° - \frac{1}{2}G)$ d. h. es ist

$$\sin \tfrac{1}{2} G = \sin \text{tot} \cdot \sqrt{(\cos p \cdot \cos(p-g) : (\sin r \cdot \sin l))}$$

und die Formel lehrt überhaupt:

Um aus drei Winkeln a, b, c jede der drei Seiten zu finden, wird der Cosinus der Halbsumme der drei Winkel mit dem Cosinus derselben um den Gegenwinkel der gesuchten Seite verminderten Halbsummen multiplicirt, das Product durch dasjenige aus den Sinus der an der gesuchten Seite liegenden Winkel dividirt; so ist die mit dem Sinustotus multiplicirte Quadratwurzel des Quotienten der Sinus der halben gesuchten Seite.

Hiemit sind denn also auch die letzten der in der 3ten Abtheil. der 5ten Tabelle für die Entwickelung der Seiten A B C aufgezeichneten Formeln hinlänglich erläutert.

Allgemeine analytische Auflösung aller bisher abgehandelten Aufgaben.

§. 19.

1. Außer den bisherigen, in den sechs ersten Tabellen zur vollständigen Uebersicht dargelegten Resultaten, hat die Sphärentrigonometrie auf analytischem Wege noch eine bedeutende Anzahl eben so merkwürdiger als nützlicher Bereicherungen erhalten. Man ist darauf bedacht gewesen, durch eine weiter getriebene Anwendung der Analysis auf die Principien der Sphärik, ihren trigonometrischen Constructionen größere Mannigfaltigkeit, freiere Beweglichkeit und einen damit nothwendig verknüpften höheren Grad von Einfachheit zu verschaffen, und von den Früchten dieser Bemühungen darf selbst in einem Elementarabrisse der Wissenschaft ein beträchtlicher Theil um so weniger mit Stillschweigen übergangen werden, da die Nachweisung der dahin gehörigen Lehren meistens auf einem viel leichteren Wege, als demjenigen, den man zu ihrer Entwickelung anfangs eingeschlagen hatte, möglich zu machen ist.

2. Es ist hier zuvörderst der Ort, eines bis dahin mit Absicht unberücksichtigt gelassenen Vortheils zu erwähnen, mittelst dessen man in den meisten Fällen der Aufmerksamkeit überhoben sein kann, welche sonst die Bestimmung der jedesmaligen Art des gesuchten Elements nach den bekannten aus geometrischen Principien unmittelbar abgeleiteten Kriterien erfordert.

Wenn man nehmlich die in den Rechnungen gebräuchlichen trigonometrischen Linien für Winkel oder Bogen, die kleiner als 90° sind, der Lage nach als ursprünglich positiv setzt, so werden sie mit Ausnahme des einzigen Sinus, der von 0° bis 180° seine ursprüngliche Lage behält, für Winkel oder Bogen, die größer als 90° sind, bis zu 180°, vermöge der entgegengesetzten Lage, negativ, und wenn man folglich jede trigonometrische Function, außer dem Sinus, der von 0° bis 180° stets das positive Vorzeichen behält, immer nur mit einem bestimmten Vorzeichen, + oder −, je nachdem der zugehörige Winkel oder Bogen kleiner oder

größer als 90° ist, in die Rechnung aufnimmt und diese nach den Regeln des sogenannten Buchstabencalculs mit steter Rücksicht auf diese Vorzeichen zu Ende führt, so erscheint demgemäß auch die Function des gesuchten Elements mit dem einen oder anderen Vorzeichen, und letzteres giebt, falls es nur nicht einem Sinus zugehört, ohne weitere Kriterien sogleich die Art des gesuchten Elements selbst zu erkennen, das nehmlich kleiner oder größer als 90° ist, je nachdem das Vorzeichen der entwickelten Function + oder — ist. Es versteht sich, wenn man mit den Logarithmen rechnet, daß sodann dieses competente Vorzeichen der Schlußfunction nur in Gedanken überschlagen wird, so wie es sich in einer Rechnung mit den wirklichen Functionen, der obigen Regel gemäß, unmittelbar ergeben würde.

3. Wer diesen algebraischen Mechanismus durch die allgemeinsten Principien der Buchstabenrechnung und die Lage der trigonometrischen Linien allein noch nicht sogleich für hinlänglich begründet erkennen und die Zuverläßigkeit desselben mithin ohne weiteren Beweis in Zweifel ziehen sollte, der kann sich davon auf dem Wege der Induction folgendermaßen überführen: er durchlaufe die Auflösungen der 1sten Tabelle, mit Uebergehung derjenigen, welche sich von andern in nichts Wesentlichem, sondern bloß durch die verschiedene Benennung der Elemente unterscheiden, und derjenigen, in welchen das Quäsit durch einen Sinus gefunden wird; es bleiben alsdann nur 13 Fälle übrig, die sich gar bald durchprüfen lassen und die Ueberzeugung von der völligen Anwendbarkeit der bezweifelten Regel für das rechtwinklige Dreieck gewähren; alsdann aber muß auch ihre Zuverläßigkeit für alle andere Auflösungen bei schiefwinkligen Dreiecken außer Zweifel treten, sobald man erwägt, daß alle übrige Kriterien, die für schiefwinklige Dreiecke gelten, lediglich auf jenen, die für das rechtwinklige Dreieck zuerst festgestellt wurden, gebaut sind.

4. Alle weiteren Formeln und Lehrsätze werden daher von jetzt an der Kürze wegen nur für solche Dreiecke entwickelt und eingerichtet werden, in denen jedes Element kleiner als 90° ist, weil sie auch für jedes andere Dreieck gelten, in welchem ein Element oder mehrere größer als 90° sind, sobald darin nur die Functionen dieser Elemente, bis auf die Sinus, welche der Natur der Sache nach bis zu 180° stets positiv bleiben, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden. Die Vorzeichen der gesuchten Elemente und mit diesen die Art der letzteren ergeben sich danach von selbst; nur dann, wenn das Quäsit durch einen Sinus gefunden wird, ist diese Abkürzung nicht anwendbar; es müssen alsdann die früheren Kriterien entscheiden, deren gründliche Auseinandersetzung schon darum nöthig, noch mehr aber um einer anschaulichen, aus dem Wesen der Sachen selbst unvermittelt ge-

schöpften Ueberzeugung willen unter allen Umständen ein reelles Bedürfniß war, ohne dessen Befriedigung die bisherige Darstellung zwar beträchtlich an Kürze gewonnen, aber an Zweckmäßigkeit und eigentlicher Bedeutung ungleich stärker verloren haben würde.

5. Träte übrigens der Umstand ein, daß auch solche Winkel oder Bogen, die nicht nur kleiner, sondern auch größer als 180° bis zu 360° sein können, durch die Function ihres Sinus gefunden, oder umgekehrt unter derselben in die Rechnung aufgenommen werden sollten, so würde hier gerade das Vorzeichen des Sinus, auf dieselbe Art, wie bei den übrigen Functionen bestimmt, je nachdem es + oder — wäre, entscheiden, ob die gesuchte Größe kleiner oder größer als 180° wäre, und umgekehrt wenn die Größe als eine gegebene zur Bestimmung anderer Größen benutzt würde, müßte das Vorzeichen ihres Sinus + oder — sein, je nachdem sie zwischen 0 und 180°, oder zwischen 180° und 360° enthalten wäre, weil die Sinus aller Winkel oder Bogen über 180° bis zu 360° bekanntlich in dem festgesetzten Sinne negativ sind; das competente Vorzeichen jeder andern gebräuchlichen trigonometrischen Function ist, ihrer Lage gemäß, für Winkel oder Bogen zwischen 180° und 270° das positive, und für solche zwischen 270° und 360° wiederum das negative, nur der Cosinus ist begreiflich, seiner Lage gemäß, nicht nur zwischen 90° und 180°, sondern auch zwischen 180° und 270° negativ; aber dagegen auch wieder zwischen 270° und 360° positiv; welches alles hier in Beziehung auf Fälle der Art, die in der Folge wirklich vorkommen, noch angemerkt zu werden verdiente.

6. Was nun die vorhin erwähnten Erweiterungen der Sphärentrigonometrie betrifft, so werden sie im Allgemeinen dadurch bewirkt, daß man alle Complexionen, welche zwischen gegebenen und gesuchten Elementen bei einem sphär. Dreiecke statt finden können, auf die möglichst kleinste Zahl reducirt und die Elemente jeder einzelnen Complexion in eine Gleichung zusammenfaßt, die, je nachdem sie für dieses oder jenes Glied aufgelöst wird, jedesmal die Constructionsformel desselben, als eines Quäsits aus den übrigen in ihr enthaltenen Elementen, hergiebt, daß mithin alle Gleichungen zusammen genommen auch für alle mögliche Aufgaben alle erforderlichen Formeln zur Auflösung in sich enthalten.

7. Solcher Complexionen, welche alle Fälle vollkommen erschöpfen, giebt es nun nicht mehr als vier. Denn in jeder Aufgabe kommen vier Elemente vor: drei gegebene und ein gesuchtes; es sind also zunächst so viel Complexionen, als es unter den sechs Elementen eines Dreiecks Verbindungen zu 4 oder Quaternionen giebt,

also funfzehn; diese schwinden aber in die erwähnten vier Complexionen zusammen, wenn man von der Individualität der Elemente abstrahirt und bloß auf dasjenige, was hier allein wesentlich ist, auf ihre gegenseitige Lage sieht. Unter den vier Elementen ist nehmlich entweder

1) nur ein Winkel und die übrigen sind drei Seiten; oder es sind darunter

2) zwei Winkel und die beiden andern sind zwei Seiten, die nun entweder so liegen, daß eine von ihnen zwischen beide Winkel fällt, beiden zugleich anliegt, während die andere einem der Winkel gegenüber steht; oder:

3) zwei Winkel und zwei Seiten, von denen keine zwischen die Winkel fällt, sondern die eine dem einen, die andere dem andern Winkel gegenüber steht; oder man hat endlich

4) drei Winkel und das vierte Element ist eine Seite.

8. Wollte man die Vereinfachung noch weiter treiben, so könnte unter Zuziehung des Polardreiecks die 1ste und 4te Complexion identificirt werden, weil ein Winkel und drei Seiten sich im Polardreiecke in eine Seite und drei Winkel verwandeln, wenn man die Supplementarelemente, weil sie einerlei Functionen mit den ursprünglichen Elementen haben, statt der letzteren selbst nimmt. Diese Vereinfachung würde aber mehr erschweren als erleichtern und es bleibt bei den vier Complexionen, deren Zahl ohnehin klein genug ist.

9. Man bezeichne, wie es sonst auch geschehen ist, die drei Seiten mit A, B, C, die drei Winkel, so wie sie der Reihe nach jenen Seiten gegenüber stehen, mit a, b, c. In jeder der vier Complexionen kommt wenigstens ein Winkel mit einer ihm gegenüberstehenden Seite vor: diese seien allemal a und A; ist noch ein zweiter Winkel da, so heiße er stets b, und die allgemeine Bezeichnung der Complexionen in Buchstaben, wobei man die 31ste Fig. noch zu Hülfe nehmen kann, giebt sich hienach von selbst: in der 1sten hat man: a, A, B, C.

in der 2ten " " a, A, b, C.
in der 3ten " " a, A, b, B.
in der 4ten " " a, b, c, A.

Um die möglichste Uebereinstimmung mit dem sonstigen Gange des Vortrags herzustellen, mögen sie künftig in der folgenden Ordnung abgehandelt werden:

1) a, A, b, C.
2) a, A, B, C.
3) a, b, c, A.
4) a, A, b, B.

10. Wenn es also gelungen ist, jede dieser Complexionen mit einer Gleichung zu umfassen, so ist klar, daß der ganze Inbegriff der Sphärentrigonometrie unter der herrschenden Kategorie in diesen vier Gleichungen, als in eben so viel Grundregeln, eben sowohl concentrirt sein wird, wie die Sphärentrigonometrie unter der Kategorie der Aufgaben, bei welchen ein Winkel ein rechter war, in den zwei Neperschen Regeln zusammengefaßt wurde. Alles kommt also nur darauf zunächst an, diese Gleichungen zu gestalten, welches so sehr schwierig nicht ist; man hat sogar verm. Prop. 1. in §. 9, 2 für die 4te Complexion bereits die ganz fertige Gleichung: $\sin A . \sin B = \sin B . \sin a$, in einer Gestalt, die nicht einfacher sein kann; und auch aus den übrigen dort befindlichen Proportionen lassen sich für die 3 ersten Complexionen die Gleichungen ableiten, wenn man dabei nur einige schon in der Ebenentrigonometrie allgemein gebräuchliche Formeln zu Hülfe nimmt. Es werden daher vorerst noch im folgenden §phen, um den Nachweisungen die möglichste Kürze und Bestimmtheit zu geben, diese Formeln nebst noch mehreren andern, welche bei der ferneren Modification der Grundgleichungen in Anspruch genommen werden, unter einer laufenden Nummer aufgeführt, wobei die gewöhnlicheren, als hinlänglich bekannt, ohne weitere Ableitung dastehen, die weniger bekannten mit einem kurzen Beweise versehen sind.

§. 20.

Trigonometrische Formeln für den Halbmesser oder $\sin tot = 1$ und für Winkel oder Bogen die nicht größer als 90° sind.

1. $\sin \alpha^2 = 1 - \cos \alpha^2$.
2. $\cos \alpha^2 = 1 - \sin \alpha^2$.
3. $\sin \alpha = \cos \alpha . \operatorname{tang} \alpha = \cos \alpha : \cot \alpha$.
4. $\cos \alpha = \sin \alpha : \operatorname{tang} \alpha = \sin \alpha . \cot \alpha = 1 : \sec \alpha$.
5. $\operatorname{tang} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = \sin \alpha . \cos \alpha : \cos \alpha^2$.
6. $\cot \alpha = \cos \alpha : \sin \alpha$.
7. $\operatorname{tang} \alpha . \cot \alpha = \sin tot = 1$.
8. $\sec \alpha^2 = 1 + \operatorname{tang} \alpha^2$.
9. $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta$.
10. $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \sin \beta$.
11. $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha . \cos \beta - \sin \alpha . \sin \beta$.
12. $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$.

13. $\tang(\alpha+\beta)=(\tang\alpha+\tang\beta):(1-\tang\alpha\,.\,\tang\beta)$ entsteht, wenn man F. 9 durch F. 11. dividirt und, nachdem man auf der rechten Seite der Gleichung Zähler und Nenner mit $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$ dividirt hat, nach F. 5. gehörig reducirt.

14. $\tang(\alpha-\beta)=(\tang\alpha-\tang\beta):(1+\tang\alpha\,.\,\tang\beta)$ eben so aus F. 10 u. F. 12.

15. $\cot(\alpha+\beta)=(1-\tang\alpha\,.\,\tang\beta):(\tang\alpha+\tang\beta)$ verm. F. 13 u. F. 7.

16. $\cot(\alpha-\beta)=(1+\tang\alpha\,.\,\tang\beta):(\tang\alpha-\tang\beta)$ verm. F. 14 u. F. 7.

17. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha$ (aus F. 9, wenn $\beta=\alpha$) $=2\tang\alpha\,.\,\cos\alpha^2$ verm. F. 5.

18. $\cos 2\alpha=\cos\alpha^2-\sin\alpha^2$ (aus F. 11, wenn $\beta=\alpha$) $=2\cos\alpha^2-1$
$=1-2\sin\alpha^2$. verm. F. 1 u. 2.

19. $\tang 2\alpha=2\tang\alpha:(1-\tang\alpha^2)$ verm. F. 13. wenn $\beta=\alpha$.

20. $\cot 2\alpha=(1-\tang\alpha^2):2\tang\alpha$ verm. F. 15. wenn $\beta=\alpha$.

21. $\sin 2\alpha=2\tang\alpha:(1+\tang\alpha^2)$ verm. F. 17, 4, 5 u. 8.

22. $\cos 2\alpha=(1-\tang\alpha^2):(1+\tang\alpha^2)$ aus F. 19 u. 21. verm. F. 4.

23. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\,.\,\cos\beta$. wenn F. 9 und 10 addirt werden.

24. $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\,.\,\sin\beta$. wenn F. 10 von F. 9 subtrahirt wird.

25. $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\,.\,\cos\beta$. wenn F. 11 und 12 addirt werden.

26. $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\,.\,\sin\beta$. wenn F. 11 von F. 12 subtrah. wird.

wird hier überall $\alpha+\beta=\varphi$, $\alpha-\beta=\psi$ gesetzt, so ist:
$\alpha=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$, $\beta=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ und es entstehen bei gehöriger Substitution dieser Werthe die folgenden Formeln:

27. $\sin\varphi+\sin\psi=2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ aus F. 23.

28. $\sin\varphi-\sin\psi=2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ aus F. 24.

29. $\cos\varphi+\cos\psi=2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ aus F. 25.

30. $\cos\psi-\cos\varphi=2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\,\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ aus F. 26.

31. $\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=(\sin\varphi+\sin\psi):(\cos\varphi+\cos\psi$. wenn F. 27 durch 29 dividirt und nach F. 5 reducirt wird.

32. $\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=(\sin\varphi-\sin\psi):(\cos\varphi+\cos\psi$ eben so aus F. 28 und 29.

33. $\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi):\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=(\sin\varphi+\sin\psi):(\sin\varphi-\sin\psi)$. wenn F. 31 durch F. 32 dividirt wird. (vergl. §. 10, .).

34. $\sin(\varphi+\psi)=2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\,.\,\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi$. verm. F. 17. wenn $2\alpha=\varphi+\psi$.

35. $(\sin\varphi+\sin\psi):\sin(\varphi+\psi)=\cos_2(\varphi-\psi):\cos_2(\varphi+\psi)$. wenn F. 2 durch F. 34. dividirt wird.

36. $(\sin\varphi - \sin\psi) : \sin(\varphi+\psi) = \sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi) : \sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$, wenn F. 28 durch F. 34. dividirt wird.

37. $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha : (1-\cos\alpha)$

denn es ist $\cos\alpha = 1 - 2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$, (F. 18) also $1-\cos\alpha = 2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$ zugleich ist $\cot\frac{1}{2}\alpha = \cos\frac{1}{2}\alpha : \sin\frac{1}{2}\alpha$ (F. 6) $= 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha : 2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$ $= \sin\alpha : 2(\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$, (verm. F. 17. wenn $\frac{1}{2}\alpha$ statt α gesetzt wird) mithin $\cot\frac{1}{2}\alpha = \sin\alpha : (1-\cos\alpha)$.

§. 21.

Fig. 31. 1. Um nun die Gleichung für die 1ste Complexion: a, A, b, C zu finden, fälle man auf B aus b einen Perpendikelbogen und nenne von den Winkeln, in welche b dadurch getheilt wird, den an C liegenden: w, so ist der andere: $b-w$ und man hat: $\cot A : \cot C = \cos(b-w) : \cos w$ (§. 9, 2. Prop. 5). Es ist aber $\cos(b-w) = \cos b \cdot \cos w + \sin b \cdot \sin w$ (F. 12). Nach der Substitution dieses Werthes, wenn zugleich die Außen- und Mittelglieder multiplicirt werden und mit $\cos w$ durchgehends dividirt wird, entsteht:
$\cot A = \cot C \cdot \cos b + \cot C \cdot \sin b \cdot \operatorname{tang} w$ (verm. F. 5). Nun ist ferner: $\operatorname{tang} w = \cot a : \cos C$ (Tab. 1. Nr. 20.); man substituire auch diesen Werth und multiplicire zugleich mit $\cos C \cdot \operatorname{tang} C$, so ist:

$$\cot A \cdot \sin C = \cos C \cdot \cos b + \sin b \cdot \cot a \text{ (verm. F. 5 und 7)}$$

die verlangte Gleichung.

2. Die Vorbereitung zur Construction der Gleichung für die 2te Complexion a, A, B, C bleibt dieselbe, nur nenne man von den Abscissen der Seite B die an C liegende: v, die andere also $B-v$, so ist: $\cos A : \cos C = \cos(B-v) : \cos v$ (§. 9, Prop. 2). Es ist wieder $\cos(B-v) = \cos B \cdot \cos v + \sin B \cdot \sin v$ (F. 12); daher $\cos A = \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \cos C \cdot \operatorname{tang} v$ (verm. F. 5). Aber $\operatorname{tang} v = \cos a \cdot \operatorname{tang} C$ (Tab. 1. Nr. 21), folglich ist

$$\cos A = \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \text{ (verm. F. 5)}$$

die beabsichtigte Gleichung.

3. Zur Entwickelung der Gleichung für die 3te Complexion: a, b, c, A dient ein Perpendikel aus c auf C; von den Winkeln, in welche dadurch c zerfällt, heiße der an A liegende: u, der andere also $c-u$ und es ist: $\cos a : \cos b = \sin(c-u) : \sin u$ (§. 9, 2 Prop. 3);

$$\sin(c-u) = \sin c \cdot \cos u - \cos c \cdot \sin u \text{ (verm. F. 10)},$$

daher

daher auch $\cos a = \cos b . \sin c . \cot u - \cos b . \cos c$ (verm. §. 6.), da nun $\cot u = \cos A . \tang b$ (Tab. 1. Nr. 20), so ist:

$$\cos a = \cos A . \sin b . \sin c - \cos b . \cos c \text{ (verm. §. 3)}$$

die erforderliche Gleichung.

4. Für die 4te Complexion: a, A, b, B hat man bereits die nöthige Gleichung $\sin a . \sin B = \sin A . \sin b$, vermöge der 1sten Proportion in §. 9, 2. ohne alle weitere Vorbereitungen.

6. Die einzelnen Seiten und Winkel des Dreiecks sind durchgehends kleiner als 90° angenommen, der Bemerkung in §. 19, 4 gemäß, weshalb der Perpendikelbogen überall innerhalb des Dreiecks liegt; nichts desto weniger gelten die Gleichungen, jener Bemerkung zufolge, auch für Dreiecke, in welchen einzelne Elemente größer als 90° sind, sobald nur die Vorzeichen gehörig geändert werden; auch dann, wenn einzelne Elemente = 90° sind, behalten sie ihre Gültigkeit, weil die Formeln und Proportionen, auf denen sie gebaut sind, gleichfalls für diesen Umstand gelten. Dies ist daher hier, zugleich für alle künftige Entwickelungen, noch ein für allemal in Erinnerung gebracht worden.

§. 22.

2. Es sind also: $\cot A . \sin C = \cos C . \cos b + \sin b . \cot a$

$\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$

$\cos a = \cos A . \sin b . \sin c - \cos b . \cos c$

$\sin a . \sin B = \sin A . \sin b$, die vier Gleichungen, welche den Schlüssel zur ganzen Sphärentrigonometrie unter der herrschenden Kategorie ausmachen; indem, sobald man diejenige Gleichung, von welcher die durch die drei gegebenen Elemente und das Quäsit gebildete Quaternion umfaßt wird, für letzteres aufgelöst hat, der Zugang zu dessen entschiedenen Gestaltung sodann geöffnet ist. Indessen zeigt sich bald, daß der unumschränkte Gebrauch dieses allgemeinen Instruments eine schon etwas geübtere Hand voraussetzt, da die Gleichungen, die 4te ausgenommen, eine ganz einfache algebraische Auflösung für jedes der in ihnen enthaltenen Elemente nicht so unmittelbar gestatten. Man erkennt bei dieser Gelegenheit eine merkwürdige Uebereinstimmung in der allgemeinen Form den vier Gleichungen. In den drei ersten nehmlich sind überall zwei Opposita, A und a, deren jedes in jeder Gleichung nur einmal, durch eine und dieselbe Function, in der ersten Gleichung durch seine Cotangente, in den zwei folgenden durch seinen Cosinus repräsentirt wird, und für eine jede dieser Größen läßt sich daher die Gleichung,

in welcher sie enthalten ist, nach den ersten Regeln der Algebra auflösen. Die ausser diesen beiden Oppositis noch übrigen zwei Größen, kommen jede in jeder Gleichung zweimal und zwar unter ungleichnahmigen Functionen, nehmlich überall als Sinus und Cosinus zugleich vor und erlauben eben daher keine reine Auflösung. Die vierte Gleichung steht unter demselben Bildungsgesetz, wie die drei ersten; der Unterschied liegt bloß darin, daß nebst den beiden Oppositis A und a, die in ihr, so wie in den drei ersten sich vorfinden, auch die beiden übrigen Größen B und b gleichfalls Opposita sind, die eben daher, gerade so wie A und a, jede auch nur einmal unter einer einzigen Function, nehmlich der des Sinus erscheinen, daß also die nehmliche Norm, welche in den drei ersten Gleichungen die Irrationalität erzeugte, dieselbe in der vierten gänzlich aufhebt und die leichteste Entwickelung jedes einzelnen Gliedes verstattet. — Das nächste Mittel, welches sich nun zur Handhabung und Bewältigung jener Irrationalität der drei ersten Gleichungen darbietet, wäre dieses, daß man nach F. 1 oder 2, für den Sinus seinen Werth durch den Cosinus, oder umgekehrt, statt des Cosinus dessen Werth, durch den Sinus ausgedrückt, in die Gleichungen einführte, um so statt der ungleichnahmigen Functionen eines und desselben Elements die gleichnahmigen und mit diesen einen abgeschlossenen Ausdruck von jenem unter dem Wurzelzeichen zu erhalten. Dadurch würde man aber auf zusammengesetzte Formen gerathen, statt deren durch geschicktere Wendungen beträchtlich einfachere zu gewinnen sind.

2. Hiezu dienen die Formeln: 21 und 22 in §. 20, durch deren Benutzung man jedesmal einen Ausdruck für die Function der Hälfte des gesuchten Elements bekommt. Es sei z. B. gleich aus der 1sten Gleichung der Ausdruck für C zu entwickeln.

Man setze $\tang \frac{1}{2} C = x$, so ist verm. F. 21; $\sin C = \frac{2x}{1+x^2}$ und verm. F. 22, $\cos C = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Man substituire diese Werthe in die Gleichung, so kommt:

$$\cot A \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \cos b \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} + \sin b \cdot \cot a,$$ oder nachdem die Brüche fortgeschafft worden:

$$2 \cot A \cdot x = \cos b - \cos b \cdot x^2 + \sin b \cdot \cot a + \sin b \cdot \cot a \cdot x^2.$$

Setzt man statt der Cotangenten deren Werthe nach F. 6. und ordnet die quadratische Gleichung, so hat man:

$$\frac{\cos a . \sin b - \sin a . \cos b}{\sin a} . x^2 - \frac{2 \cos A}{\sin A} . x = - \frac{\cos a . \sin b + \sin a . \cos b}{\sin a}$$

oder vermöge der Formeln Nr. 9 und 10:

$$\frac{\sin(b-a)}{\sin a} . x^2 - \frac{2 \cos A}{\sin A} . x = - \frac{\sin(a+b)}{\sin a}$$

und wenn man das Hauptglied vom Coefficienten befreit:

$$x^2 - \frac{2 \cos A . \sin a}{\sin A . \sin(b-a)} . x = - \frac{\sin(a+b)}{\sin(b-a)}; \text{ also:}$$

$$x = \frac{\cos A . \sin a}{\sin A . \sin(b-a)} \pm \sqrt{\left(\frac{\cos A^2 . \sin a^2}{\sin A^2 . \sin(b-a)^2} - \frac{\sin(a+b)}{\sin(b-a)} \right)}$$

$$= \frac{\cos A . \sin a \pm \sqrt{(\cos A^2 . \sin a^2 - \sin A^2 . \sin(a+b) . \sin(b-a))}}{\sin A . \sin(b-a)}$$

$$= \frac{\cos A . \sin a \pm \sqrt{(\cos A^2 . \sin a^2 - \sin A^2 . \sin b^2 . \cos a^2 + \sin A^2 . \cos b^2 . \sin a^2)}}{\sin A . \sin(b-a)}$$

wo zuletzt die Wurzelgröße wieder nach den Formeln Nr. 10 und 11. umgeschaffen ist. Wenn man nun in dieser Gestalt derselben im ersten Gliede dem $\cos A^2$, im zweiten dem $\cos a^2$ und im dritten dem $\cos b^2$ ihre Werthe, der 2ten Formel gemäß, unterlegt und gehörig reducirt, so erhält man endlich: x. h.

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos A . \sin a \pm \sqrt{(\sin a^2 - \sin b^2 . \sin A^2)}}{\sin A . \sin(b-a)}$$

wo der $\sin(b-a)$ im Nenner, eben so wie $\sin(\alpha-\beta)$ in §. 20, F. 10. offenbar nur der Sinus der positiven Differenz ist, weshalb er künftig auch durch $\sin(a \div b)$ bezeichnet werden wird.

3. Da alle übrige Irrationalitäten der Grundgleichungen auf völlig gleiche Weise gehandhabt werden, so würde es überflüssig sein, hier davon mehr als die bloßen Resultate herzusetzen. Löst man also die 1ste Gleichung für jede der in ihr enthaltenen Größen a, A, b und C auf; die 2te, weil darin B in Hinsicht seiner Lage gegen die übrigen Größen im wesentlichen sich gar nicht von C unterscheidet, nur für die drei Größen: a, A, C; eben so auch die 3te nur für die drei Elemente: a, A, c und endlich die 4te, bei welcher nur eine zwiefache Verschiedenheit in der gegenseitigen Lage des Gegebenen und Gesuchten möglich ist, nur für die beiden Elemente a und A, so entstehen die folgenden 12 Formeln:

1) $\cot a = (\cot A . \sin C - \cos C . \cos b) : \sin b.$

2) $\cot A = (\cos C . \cos b + \sin b . \cot a) : \sin C.$

3) $\text{tang } \frac{1}{2}b = \frac{\cos a \cdot \sin A \pm \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \cdot \sin C^2)}}{\sin a \cdot \sin (A + C)}$.

4) $\text{tang } \frac{1}{2}C = \frac{\sin a \cdot \cos A \pm \sqrt{(\sin a^2 - \sin b^2 \cdot \sin A^2)}}{\sin A \cdot \sin (a + b)}$.

5) $\cos a = (\cos A - \cos B \cdot \cos C) : (\sin B \cdot \sin C)$.

6) $\cos A = \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$.

7) $\text{tang } \frac{1}{2}C = \frac{\cos a \sin B \pm \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2)}}{\cos A + \cos B}$.

8) $\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c - \cos b \cdot \cos c$.

9) $\cos A = (\cos a + \cos b \cdot \cos c) : (\sin b \cdot \sin c)$.

10) $\text{tang } \frac{1}{2}c = \frac{\sin b \cdot \cos A \pm \sqrt{(\sin a^2 - \sin b^2 \cdot \sin A^2)}}{\cos a - \cos b}$.

11) $\sin a = \sin A \cdot \sin b : \sin B$.

12) $\sin A = \sin a : \sin B \cdot \sin b$.

in denen man also eben so viel allgemeine Ausdrücke für alle möglichen Quäsite der sämmtlichen unter die herrschende Kategorie gehörigen Aufgaben gewonnen hat.

4. Von diesen 12 Gleichungen umfaßt gerade die eine Hälfte alle diejenigen Aufgaben, welche immer bestimmt sind, sobald die Data nur den allgemeinen Constructionsgesetzen des sphär. Dreiecks entsprechen; die andere Hälfte dagegen entspricht den sämmtlichen Aufgaben, in welchen, ungeachtet die Data mit der Natur des sphär. Dreiecks nicht im Widerspruche sind, die Construction dennoch zweideutig oder völlig unmöglich sein kann, und diese Hälfte besteht eben aus den 4 Gleichungen mit den Irrationalgrößen, Nr. 3, 4, 7, 10. und den beiden letzten Gleichungen Nr. 11, 12. Die Werthe der Irrationalgleichungen werden unmöglich, so oft die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist und dieses kann daher, wie sich mit einer entschiedenen, durch die analytische Consequenz verbürgten Ueberzeugung behaupten läßt, hier nur unter denselben Umständen geschehen, bei welchen man in der Sphärengeometrie aus den nehmlichen räumlich gegebenen Datis schlechthin gar kein Dreieck, ein wirkliches so wenig, als ein Afterdreieck zu construiren vermag, (vergl. Sphärengeom. §. 38 u. 39). Außerdem aber giebt eine jede dieser vier Gleichungen, vermöge der Natur der Wurzelgrößen, die allemal ein zweifaches Vorzeichen haben müssen, auch immer zwei verschiedene Functionen zugleich, die nach Maßgabe der besonderen Vorzeichen, welche die bekannten Functionen, ihrer Art zufolge, in bestimmten Fällen erhalten, beide negativ, oder beide positiv, oder

die eine negativ, die andere positiv sein können. Wenn beide negativ sind, so ist folglich schon die Hälfte eines jeden Quäsits größer als 90°, also jedes Quäsit selber größer als 180°, und die Umstände sind dann die nehmlichen, wie diejenigen in der Sphärengeometrie, bei welchen man zwar zwei Dreiecke, aber keine anderen, als Afterdreiecke erhält. Sind beide gesuchte Functionen positiv, also die Hälfte eines jeden Elements kleiner als 90°, so sind beide Quäsite kleiner als 180°, gemeinschaftlich gültig und die Aufgabe ist von derselben Beschaffenheit, wie diejenigen, denen bei der räumlichen Construction zwei wirkliche Dreiecke zugleich entsprechen. Ist endlich nur die eine der beiden entwickelten Functionen positiv, so ist durch die Aufgabe nur ein einziges wirkliches Dreieck bestimmt, für welches man das gesuchte Element in einer abgeschlossenen Größe unter 180° erhält, während das zweite, mit der negativen Function zusammenhängende, größer als 180° ist und nur einem Afterdreiecke zugehört.

Dieses ist also die eigentliche Bedeutung der vier Gleichungen mit den Wurzelgrößen. Auch die beiden Gleichungen Nr. 11 und 12. offenbaren den Widerspruch, oder die Ueberbestimmung welche, der Gesetzmäßigkeit der Data ungeachtet, in der Aufgabe enthalten sein können, so oft sie wirklich vorhanden, dadurch, daß sie den Sinus des Quäsits alsdann entweder größer als den Sinustotus, wenn nehmlich gar kein Dreieck möglich, oder mit dem negativen Vorzeichen geben, wenn nur Afterdreiecke möglich sind, in welchen die dem Quäsit entsprechenden Elemente eine Größe über 180° haben.

So fügt sich also auch hier in der trigonometrischen Construction alles nach einer eben so organischen Consequenz, wie in der geometrischen (Sphärengeometrie §. 38, 6 und §. 39, 6), und so oft die Aufgabe nicht schlechthin überbestimmt, sondern entweder nur zweideutig oder völlig bestimmt ist, wird man auch aus der gehörigen Irrationalgleichung zwei entsprechende positive, oder höchstens nur eine negative neben einer zum Ziel führenden positiven Function, niemals zwei negative, noch weniger einen ganz unmöglichen Ausdruck, erhalten, eben so wie die beiden letzten Gleichungen alsdann jedesmal den competenten Sinus kleiner als den Sinustotus hergeben, nur daß bei diesen letzteren Gleichungen, aus mehr erwähnten Gründen, sodann nicht die Zweideutigkeit oder Bestimmtheit des Quäsits, so wie durch die Irrationalgleichungen, vermittelst des Vorzeichens selber dargethan ist, sondern nach den bekannten geometrischen Kriterien beurtheilt werden muß.

auch hat man, weil verm. §. 17, $2\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}a = \sin a$ ist,

$$\sin a = \frac{2\sqrt{\sin P.\sin(P-A).\sin(P-B).\sin(P-C)}}{\sin B.\sin C}$$

einen Ausdruck für den Sinus des ganzen Winkels a aus den drei Stücken; nur läßt sich nach demselben, aus bekannten Gründen die Art des Winkels a nicht unmittelbar bestimmen.

3. Auf völlig gleiche Weise wie die vorhergehenden aus der 8ten, ergeben sich aus der 9ten Gleichung, wenn man die halbe Winkelsumme mit p bezeichnet und die Vorzeichen gehörig berücksichtigt, die folgenden Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{-\frac{\cos p.\cos(p-a)}{\sin b.\sin c}} \text{ und}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos(p-b).\cos(p-c)}{\sin b.\sin c}}$$

die sich wieder von den in §. 18, 10 und 11 bereits gefundenen in nichts wesentlichem, als durch den hier nicht ausgedrückten $\sin 0t = 1$ und das negative Vorzeichen der Größe unter dem Wurzelzeichen in der 1sten Formel unterscheiden. Dort fand der Gebrauch der Vorzeichen nicht statt, weil die Art der Quäsite durch geometrische Kriterien entschieden wurde; hier ist er wesentlich und das erwähnte negative Vorzeichen, weit entfernt, den Ausdruck unmöglich und widersprechend zu machen, bestätigt vielmehr die innere Consequenz dieses Gebrauchs und der analytischen Symbolik überhaupt, indem es hier gerade nothwendig ist, damit in der numerischen Construction das Quäsit wirklich nicht die Form einer unmöglichen Größe annehmen möge; denn da die Winkelsumme $a+b+c$ stets größer als 180° (s. i. 5 Geom.), also $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$ größer als 90° ist, so bekommt dieser Factor bei wirklichen Rechnungen jedesmal an und für sich schon ein negatives Vorzeichen, welches eben den ganzen Ausdruck unmöglich machen würde, wenn es nicht durch das allgemeine negative Vorzeichen wieder aufgehoben würde.

Uebrigens hat man mit jenen beiden Formeln eben so wie vorhin auch

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{-\frac{\cos p.\cos(p-a)}{\cos(p-b).\cos(p-c)}}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \sqrt{-\frac{\cos(p-b).\cos(p-c)}{\cos p.\cos(p-a)}} \text{ und}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{-\cos p.\cos(p-a).\cos(p-b).\cos(p-c)}}{\sin b.\sin c}$$

4. Wenn

4. Wenn man ferner in der 6ten Gleichung den Größen cos A, cos a ihre Werthe nach Maßgabe der §. 18 in §. 20. unterlegt, so ist:

$1 - 2(\sin\frac{1}{2}A)^2 = \cos B.\cos C + \sin B.\sin C - 2\sin B.\sin C.(\sin\frac{1}{2}a)^2$

und $2(\cos\frac{1}{2}A)^2 - 1 = \cos B.\cos C - \sin B.\sin C + 2\sin B.\sin C.(\cos\frac{1}{2}a)^2$

oder nach §. 12 und 11.

$1 - 2(\sin\frac{1}{2}A)^2 = \cos(B-C) - 2\sin B.\sin C.(\sin\frac{1}{2}a)^2$ und

$2(\cos\frac{1}{2}A)^2 - 1 = \cos(B+C) + 2\sin B.\sin C.(\cos\frac{1}{2}a)^2$.

Substituirt man aufs neue, der §. 18. gemäß, den Größen cos (B — C) und cos (B + C) ihre Werthe, so erhält man:

$-(\sin\frac{1}{2}A)^2 = -(\sin\frac{1}{2}(B-C))^2 - \sin B.\sin C.(\sin\frac{1}{2}a)^2$ und

$(\cos\frac{1}{2})A^2 = (\cos\frac{1}{2}(B+C))^2 + \sin B.\sin C.(\cos\frac{1}{2}a)^2$; also:

$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{((\sin\frac{1}{2}(B+C))^2 + \sin B.\sin C.(\sin\frac{1}{2}a)^2)}$ und

$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{((\cos\frac{1}{2}(B+C))^2 + \sin B.\sin C.(\cos\frac{1}{2}a)^2)}$.

5. Eben so erhält man durch ein ganz gleiches Verfahren aus der 8ten Gleichung die folgenden Formeln:

$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{((\cos\frac{1}{2}(b+c))^2 + \sin b.\sin c.(\sin\frac{1}{2}A)^2)}$ und

$\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{((\sin\frac{1}{2}(b+c))^2 + \sin b.\sin c.(\cos\frac{1}{2}A)^2)}$.

§. 24.

1. Um den bisher construirten Formeln die ihnen größtentheils mangelnde Brauchbarkeit zur Anwendung der Logarithmen zu geben, sieht man sich genöthiget, dieselben durch zweckmäßige Substitutionen in solche Ausdrücke zu zerlegen, in welchen die Hauptgrößen nur Multiplicatoren oder Divisoren sind. Dadurch geht allerdings die sonst so wünschenswerthe Einheit und Abgeschlossenheit im Ausdrucke des Quäsits wieder verloren und man wird in der That durch einen Rückschritt wieder zur anfänglichen Form der Entwickelung geführt, das Gesuchte nehmlich aus den vereinigten Resultaten verschiedener Operationen entstehen zu lassen, aber theils ist es an und für sich schon von Wichtigkeit, ein und eben dasselbe Ziel auf mehr als einem Wege erreichen zu können, theils aber lernt man auch auf dieser rein analytischen Bahn die Probleme in allen ihren Theilen bei weitem kunstmäßiger, durchgreifender und vielseitiger gestalten und die Resultate gewinnen an Mannigfaltigkeit, Kürze und Geschmeidigkeit viele Vorzüge, welche den früheren mangeln.

2. Die erwähnte Zerlegung kann, weil in allen Ausdrücken die ungleichnahmigen Functionen des Sinus und Cosinus von einer und derselben Größe vorkommen, überall durch einen analytischen Kunstgriff bewirkt werden, vermöge dessen aus

einer jeden Gleichung von der allgemeinen Form: $m.\sin\alpha + n.\cos\alpha = p$, wo die Coefficienten m und n positiv oder negativ und auch selbst wieder trigonometrische Functionen sein dürfen, zwei andere Gleichungen mit monomischen Werthen abgeleitet werden können. Es hat damit folgende Bewandniß:

Man befreit die eine Function, z. B. $\sin\alpha$ von ihrem Coefficienten, also: $\sin\alpha + \frac{n}{m}.\cos\alpha = \frac{p}{m}$; setzt darauf den Coefficienten $\frac{n}{m}$ der anderen Function gleich einer Tangente oder Cotangente, welches begreiflich jedesmal thunlich ist, da die Tangenten- und Cotangentenreihe alle Werthe von 0 bis ∞ in sich schließt, also: $\frac{n}{m} = \text{tang}\,\varphi$, welches die erste der beiden Gleichungen ist, wo mithin φ bekannt ist, indem mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln der zur Tangente $\frac{n}{m}$ gehörige Winkel oder Bogen $= \varphi$ aufgesucht wird.

Man hat daher $\sin\alpha + \text{tang}\,\varphi.\cos\alpha = \frac{p}{m}$, oder

$$\sin\alpha + \frac{\sin\varphi.\cos\alpha}{\cos\varphi} = \frac{p}{m}, \text{ (§. 20, F. 5.)},$$

daher: $\sin\alpha.\cos\varphi + \sin\varphi.\cos\alpha = \frac{p.\cos\varphi}{m}$; folglich

auch: $\sin(\alpha+\varphi) = \frac{p.\cos\varphi}{m}$ (§. 20, F. 9); welches die andere Gleichung ist, aus welcher $\alpha+\varphi$ und somit auch, weil φ bereits bekannt ist, α selbst sehr bequem logarithmisch zu entwickeln ist.

Hätte man $\frac{n}{m} = \cot\psi$ gesetzt, so war

$$\sin\alpha + \cot\psi.\cos\alpha = \frac{p}{m} = \sin\alpha + \frac{\cos\psi.\cos\alpha}{\sin\psi} \text{ (§. 20, F. 6)},$$

daher $\sin\alpha.\sin\psi + \cos\psi.\cos\alpha = \frac{p\sin\psi}{m}$ und

$\cos(\alpha-\psi) = \frac{p.\sin\psi}{m}$ (§. 20, F. 12.) die 2te Gleichung.

Eben so konnte auch gleich zu Anfang mit n statt m dividirt und alsdann entweder $\frac{m}{n} = \text{tang}\,\chi$ oder $\frac{m}{n} = \cot\xi$ gesetzt worden, wo unter der ersteren Annahme:

$\cos(\alpha-\chi)=\frac{p.\cos\chi}{n}$, unter der zweiten:

$\sin(\alpha+\xi)=\frac{p.\sin\xi}{n}$ die andere der beiden Gleichungen wurde.

3. Hiernächst werden in den folgenden Sphen alle Aufgaben unter anfänglicher Beibehaltung der in den Grundgleichungen gebrauchten Bezeichnung der Elemente, übrigens in der früher beobachteten Ordnung, nach dem eben angedeuteten Princip, noch einmal durchgegangen, um die für jedes Quäst erforderliche Construction in ihrer bestimmten Gestalt kennen zu lernen, und alle hieher gehörigen analytischen Ausdrücke, sowohl die Grundformeln, wie die daraus abgeleiteten, sind zur bessern Uebersicht wieder in einer besonderen Tafel, nehmlich der 8ten, zusammengestellt, welche daher einen gedrängten aber vollständigen Auszug aus der folgenden Paragraphenreihe von §. 5 bis §. 36. bildet.

§. 25.

Aufgabe I.

Es sind zwei Seiten mit dem zwischen ihnen liegenden Winkel gegeben: man sucht einen der beiden unbekannten Winkel.

Auflösung.

1. Die Aufgabe gehört zur 1sten Complexion: a, A, b, C.

Gegeben sind: A, C und b; gesucht wird der der Seite A gegenüberliegende Winkel a.

Die 1ste Gleichung (§. 22, 3) giebt den ungetheilten Ausdruck des Quäst

$$\cot a=\frac{\cot A.\sin C-\cos b.\cos C}{\sin b}.$$

2. Um denselben zur Anwendung der Logarithmen zu eignen, dividirt man mit dem Coefficienten $\frac{\cot A}{\sin b}$, so entsteht:

$$\frac{\cot a.\sin b}{\cot A}=\sin C-\frac{\cos b.\cos C}{\cot A}$$, oder vermöge F. 7 in §. 20.

$$\frac{\sin b.\operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} a}=\sin C-\cos b.\operatorname{tang} A.\cos C.$$

Man setze nun: $\cos b.\operatorname{tang} A=\cot\Phi=\frac{\cos\Phi}{\sin\Phi}$ (§. 20, F. 6),

so ist $\frac{\sin b . \operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} a} = \sin C - \frac{\cos \varphi . \cos C}{\sin \varphi} = \frac{\sin C . \sin \varphi - \cos C . \cos \varphi}{\sin \varphi}$

$= -\frac{\cos C . \cos \varphi - \sin C . \sin \varphi}{\sin \varphi} = -\frac{\cos (C + \varphi)}{\sin \varphi}$ verm. §. 20, F. 11.,

folglich $\operatorname{tang} a = -\frac{\sin b . \operatorname{tang} A . \sin \varphi}{\cos (C + \varphi)}$; oder da $\cos b . \operatorname{tang} A = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$,

folglich auch $\frac{\sin b . \operatorname{tang} A}{\operatorname{tang} b} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ (verm. §. 20, F. 4), und also

$\sin b . \operatorname{tang} A = \frac{\cos \varphi . \operatorname{tang} b}{\sin \varphi}$ ist, so hat man nach gehöriger Substitution:

$$\operatorname{tang} a = -\frac{\operatorname{tang} b . \cos \varphi}{\cos (C + \varphi)}.$$

Es wird also a aus seiner Tangente gefunden, wenn man anfänglich $\cos b . \operatorname{tang} A$ logarithmisch entwickelt, dazu, als zu einer Cotangente, aus den trigonometrischen Tafeln, den entsprechenden Werth φ entnimmt, dessen Art auf die bekannte Weise durch das Vorzeichen der Cotangente, so wie dieses durch die Art der Factoren, bestimmt wird; sodann sucht man zu φ und $C + \varphi$ aus den Tafeln wieder die Cosinus und entwickelt die Größe $\frac{\operatorname{tang} b . \cos \varphi}{\cos (C + \varphi)}$ wieder logarithmisch, in welcher man sodann die tang a und mit dieser den Winkel a selbst hat; es ist nehmlich, wenn jene Größe, unter gehöriger Beachtung der Vorzeichen schon an und für sich selbst negativ wird, wegen des allgemeinen negativen Vorzeichens der Formel, die tang a positiv und es gilt sodann folglich von den beiden Supplementarwerthen der tang a der spitze Winkel a; im entgegengesetzten Falle ist der stumpfe Winkel a gültig. — Es sind aber zur richtigen Bestimmung des Vorzeichens der Größe $\frac{\operatorname{tang} b . \cos \varphi}{\cos (C + \varphi)}$ die in §. 19, 5. gegebenen Erinnerungen wohl zu beachten. Weil nehmlich das $C + \varphi$ des Nenners hier auch größer als 180° werden kann, so wird der $\cos (C + \varphi)$ auch negativ, so oft $C + \varphi$ eine Größe zwischen 180° und 270° erlangt, dagegen wird er für ein $C + \varphi$ zwischen 270° und 360° wiederum positiv. Sollte $C + \varphi$ gerade einen der Gränzwerthe: 90°, 180°, 270°, erhalten, (360° kann es, weil C und φ einzeln kleiner als 180° sein müssen, nie erreichen, so würde dieser Umstand für denjenigen, der mit dem bisherigen des Vortrags vertraut ist, nichts Befremdendes haben; für $C + \varphi = 90°$ oder für $C + \varphi = 270°$ ist nehmlich der $\cos (C + \varphi) = 0$, also wird dann die

tang a unendlich und es muß folglich $a = 90°$ sein; hingegen wird für $C + \Phi = 180°$ der ganze Nenner $= -\sin tot$ und alles übrige geht seinen gesetzmäßigen Gang. — Aehnliche Bemerkungen gelten für ähnliche Fälle in der Folge und werden daher von jetzt an in der Regel mit Stillschweigen übergangen werden.

Uebrigens wird hier nur noch ein für allemal in Erinnerung gebracht, daß, weil alle diese Formeln durchgehends für den $\sin tot = 1$ gelten, bei wirklichen Rechnungen nicht vergessen werden dürfe, alle aus den trigonometrischen Tafeln entnommenen logarithmischen Functionen um den in den Tafeln gültigen $\log \sin tot = 10$ zu vermindern, so wie umgekehrt, jede durch die Rechnung entwickelte logarithmische Function, wenn man für sie nach den Tafeln den zugehörigen Bogen oder Winkel sucht, zuvor um jenen $\log \sin tot = 10$ zu vermehren.

§. Eine andere sehr vortheilhafte, schon von Neper, nur auf Umwegen, gefundene Entwickelungsmethode, nach welcher man, wie in dem nehmlichen Falle in der Ebenentrigonometrie, beide unbekannte Winkel zugleich in ihrer halben Summe und Differenz findet, ist folgende:

In der Grundgleichung: $\cot a \cdot \sin b = \cot A \cdot \sin C - \cos b \cdot \cos C$ ist $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$, (§. 20, F. 6.) und $\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}$ vermöge der 11ten Gleichung in §. 22, 3. Substituirt man diese Werthe und multiplicirt zugleich mit $\sin A$, so erhält man: $\cos a \cdot \sin B = \cos A \cdot \sin C - \cos b \cdot \cos C \cdot \sin A$ (§. 20, F. 4).

In dieser Gleichung hat man die Oppositа: b und B, a und A, und die einzelne Seite C; man behalte b und B bei, nehme aber statt a und A die Oppositа c und C auf, daß mithin die dritte einzelne Seite jetzt A wird, so ist auch:

$$\cos c \cdot \sin B = \cos C \cdot \sin A - \cos b \cdot \cos A \cdot \sin C.$$

Werden beide Gleichungen addirt, so entsteht die folgende:

$\sin B \cdot (\cos a + \cos c) = \sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C - \cos b \cdot \sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C)$

oder verm. F 9. in §. 20: $\sin B \cdot (\cos a + \cos c) = (1 - \cos b) \cdot \sin(A + C)$.

Nun ist $\sin A : \sin a = \sin C : \sin c = \sin B : \sin b$ (§. 9, 2),

daher auch $(\sin A \pm \sin a) = \sin B : \sin b$ und

$$\sin B \cdot (\sin a \pm \sin c) = \sin b \cdot (\sin A \pm \sin C).$$

Man dividire diese Gleichung durch die vorstehende aus der Addition gewonnene, so erhält man mit Rücksicht auf die zwiefachen Vorzeichen folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\sin a + \sin c}{\cos a + \cos c} = \frac{\sin b}{1 - \cos b} \cdot \frac{\sin A + \sin C}{\sin(A + C)}$$

$$\frac{\sin a \div \sin c}{\cos a + \cos c} = \frac{\sin b}{1 - \cos b} \cdot \frac{\sin A \div \sin C}{\sin A + C)}$$

und wenn man in diesen unmittelbar nach Maaßgabe der Formeln: Nr. 31, 32, 37, 35 und 36 aus §. 20. gehörig reducirt, so hat man endlich:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a + c) = \cot\tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\cos\tfrac{1}{2}(A \div C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A + C)}$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(a \div c) = \cot\tfrac{1}{2}b \cdot \frac{\sin\tfrac{1}{2}(A \div C)}{\sin\tfrac{1}{2}(A + C)}.$$

§. 26.

Aufgabe II.

Aus zwei Seiten mit dem zwischen ihnen liegenden Winkel die dritte Seite zu finden.

Auflösung.

1. Die Aufgabe fällt in die 2te Complexion: a, A, B, C.

Gegeben sind: B, C und a; gesucht wird A.

Der ungetheilte Ausdruck des Quäsits ist durch die 6te Gleichung in §. 22, 3 gegeben:

$$\cos A = \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$$

wie auch durch die Modificationen in §. 23, 4

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{(\sin\tfrac{1}{2}(B \div C))^2 + \sin B \cdot \sin C \cdot (\sin\tfrac{1}{2}a)^2)}$$

oder: $\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{((\cos\tfrac{1}{2}(B + C))^2 + \sin B \cdot \sin C \cdot (\cos\tfrac{1}{2}a)^2)}$.

2. Behufs der Anwendung der Logarithmen macht man aus der 1sten der vorstehenden Gleichungen die folgende:

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \cos C + \text{tang}\,B \cdot \cos a \cdot \sin C \text{ (§. 20, F. 5), und}$$

$$\text{setzt } \text{tang}\,B \cdot \cos a = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\varphi \text{ (F. 6), also:}$$

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \cos C + \frac{\cos\varphi \cdot \sin C}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos C + \cos\varphi \cdot \sin C}{\sin\varphi} = \frac{\sin(C + \varphi)}{\sin\varphi},$$

(berm. §. 20, F. 9), so ist: $\cos A = \frac{\cos B \cdot \sin(C + \varphi)}{\sin\varphi}$; und beim Gebrauche dieser, so wie aller ähnlicher Formeln in der Folge, in welchen Functionen eingeklammerter Größen, die auch größer als 180° werden können, vorkommen, müssen wieder die in §. 19, 5 gegebenen Erinnerungen befolgt werden.

3. Auch die 2te und 3te der obigen Gleichungen lassen sich auf eine ähnliche Weise in Gleichungen mit monomischen Werthen zerlegen.

Man bezeichne in der 2ten vorläufig die Größen:

$\sin\frac{1}{2}(B \div C)$ mit m und $\sin\frac{1}{2}a$ mit n; so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{(m^2 + \sin B.\sin C.n^2)} = m\sqrt{\left(1 + \frac{\sin B.\sin C.n^2}{m^2}\right)}.$$

Setzt man nun das 2te Glied der Größe unter dem Wurzelzeichen $= \text{tang}\,\psi^2$, also $\text{tang}\,\psi = \frac{n}{m}.\sqrt{\sin B.\sin C}$, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}A = m\sqrt{(1 + \text{tang}\,\psi^2)} = m.\sec\psi \text{ (§. 20, F. 8)} = \frac{m}{\cos\psi} \text{ (F. 4)}$$

d. h. wenn $\frac{\sin\frac{1}{2}a.\sqrt{\sin B.\sin C}}{\sin\frac{1}{2}(B-C)} = \text{tang}\,\psi$ ist,

so hat man $\sin\frac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(B \div C)}{\cos\psi}$.

Eben so zerlegt man leicht die 3te Gleichung in die folgenden:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a.\sqrt{\sin B.\sin C}}{\cos\frac{1}{2}(B \div C)} = \text{tang}\,\chi$$

und $\cos\frac{1}{2}A = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\chi}$.

Da die Wurzelgröße in diesen Formeln positiv und negativ ist und den Umständen gemäß entweder das eine oder das andere Vorzeichen gilt, so können die Hülfsgrößen ψ und χ theils kleiner, theils größer als 90° werden; weil aber eine Größe unter 90° dieselbe trigonometrische Function, wie ihre Supplementargröße über 90° hat und die Finalgröße $\frac{1}{2}A$ aus bekannten Gründen allemal kleiner als 90° sein muß, so ist die Art der Größen ψ und χ beim Gebrauch dieser Formeln gleichgültig und ψ und χ können daher hier allemal kleiner als 90° angenommen werden.

4. In der 8ten Tabelle sind bei der Verzeichnung der sämmtlichen Formeln des gegenwärtigen Sphen, um die Uebereinstimmung in der Benennung der bekannten Elemente mit denen des vorhergehenden herzustellen, statt der hier gebrauchten Buchstaben B, C und a, für die gegebenen Seiten und den eingeschlossenen Winkel, die Symbole A, C und b beibehalten und also, consequent hiemit, das Zeichen A der gesuchten Seite mit dem dortigen B vertauscht worden. Da

Verwechslungen der Art ohne alle Schwierigkeit sind, so werden sie in der Folge, so oft sie statt finden, ganz mit Stillschweigen übergangen werden.

§. 27.

Aufgabe III.

Es sind zwei Winkel mit der zwischen ihnen liegenden Seite gegeben: man sucht eine der beiden unbekannten Seiten.

Auflösung.

1. Der Fall ist in der 1sten Complexion: a, A, b, C begriffen; a, b und C sind gegeben, die dem Winkel a gegenüberliegende Seite A wird gesucht.

Die 2te Gleichung in §. 22, 3 giebt den ungetheilten Ausdruck des Quäsits:

$$\cot A = \frac{\cos C . \cos b + \sin b . \cot a}{\sin C}.$$

2. Um die Logarithmen mit Vortheil gebrauchen zu können, dividirt man obige Gleichung durch den Coefficienten $\frac{\cot a}{\sin C}$, so entsteht:

$$\frac{\cot A . \sin C}{\cot a} = \frac{\cos C . \cos b}{\cot a} + \sin b, \text{ oder:}$$

$$\frac{\tang a . \sin C}{\tang A} = \cos C . \tang a . \cos b + \sin b \text{ (§. 20, F. 7).}$$

Es wird $\cos C . \tang a = \tang \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ gesetzt (F. 5), und es ist

$$\frac{\tang a . \sin C}{\tang A} = \frac{\sin \varphi . \cos b}{\cos \varphi} + \sin b, \text{ und}$$

$$\tang a . \sin C . \cos \varphi = \tang A . (\sin \varphi . \cos b + \cos \varphi . \sin b)$$

$= \tang A . \sin (b + \varphi)$; (verm. §. 20, F. 9) also $\tang A = \frac{\tang a . \sin C . \cos \varphi}{\sin (b + \varphi)}$

oder da $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \cos C . \tang a = \frac{\sin C . \tang a}{\tang C}$, (F. 4.) so ist auch

$\tang a . \sin C = \frac{\tang C . \sin \varphi}{\cos \varphi}$, weshalb nach gehöriger Substitution

$\tang A = \frac{\tang C . \sin \varphi}{\sin (b + \varphi)}$ sich ergiebt.

3. Auch aus ihrer halben Summe und Differenz lassen sich hier zugleich beide unbekannte Seiten A und B eben so vortheilhaft und aus ganz ähnlichen

For-

Formeln, wie die beiden Winkel in §. 25, 3, finden. Man überzeugt sich davon sogleich, wenn man das Dreieck im gegenwärtigen Fall als das Polardreieck von jenem betrachtet, so daß z. B. die beiden dort entwickelten Winkel a und c die Supplemente der hier gesuchten Seiten A und C sind, und es ist das dortige $\text{tang}\frac{1}{2}(a+c) = \text{tang}\frac{1}{2}(180° - A + 180° - B) = \text{tang}\frac{1}{2}(360° - (A+B))$ $= \text{tang}(180° - \frac{1}{2}(A+B)) = \text{tang}\frac{1}{2}(A+B)$. Auf gleiche Weise bleiben im gegenwärtigen Fall auch alle übrige Factoren jener Formeln unverändert; nur die dortige $\cot\frac{1}{2}b$, welche in Beziehung auf C, als das jetzige Supplementarelement von b, zur $\cot\frac{1}{2}(180° - C) = \cot(90° - \frac{1}{2}C)$ wird, verwandelt sich sonach in die Cotangente des Complementarbogens von $\frac{1}{2}C$, d. h. in die Tangente von $\frac{1}{2}C$. Man hat daher hier:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \text{tang}\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{und } \text{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) = \text{tang}\tfrac{1}{2}C \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

§. 28.

Aufgabe IV.

Aus zwei Winkeln mit der zwischenliegenden Seite den dritten Winkel zu finden.

Auflösung.

1. Der Fall gehört zur 3ten Complexion: a, b, c, A. b, c und A sind gegeben, gesucht wird a. Dessen Ausdruck giebt die 8te Gleichung in §. 22, 3:

$$\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c - \cos b \cdot \cos c$$

oder auch jede der beiden in §. 23, 5 aus dieser abgeleiteten Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{((\cos\tfrac{1}{2}(b+c))^2 + \sin b \cdot \sin c \cdot (\sin\tfrac{1}{2}A)^2)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{((\sin\tfrac{1}{2}(b-c))^2 + \sin b \cdot \sin c \cdot (\cos\tfrac{1}{2}A)^2)}.$$

2. Zur Anwendung der Logarithmen bildet man aus der 1sten dieser Gleichungen die folgende: $\frac{\cos a}{\cos b} = \cos A \cdot \text{tang}\, b \cdot \sin c - \cos c$

und setzt $\cos A \cdot \text{tang}\, b = \text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ (§. 20, F. 5),

so ist $\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\sin\varphi \cdot \sin c - \cos\varphi \cdot \cos c}{\cos\varphi} = -\frac{\cos(c+\varphi)}{\cos\varphi}$ (§. 20, F. 11),

folglich $\cos a = -\frac{\cos b \cdot \cos(c+\varphi)}{\cos\varphi}$.

3. Oder man zerlegt die beiden andern Gleichungen, so wie in §. 26, 3; nehmlich die 4te in die folgenden:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sqrt{\sin b\cdot\sin c}}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}=\tang\psi \text{ und } \sin\tfrac{1}{2}a=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\psi}$$

oder die 5te in die folgenden:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\sqrt{\sin b\cdot\sin c}}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}=\tang\chi \text{ und } \cos\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\chi}.$$

Vom Gebrauch dieser Formeln gilt eben das, was bei den ähnlichen in §. 26. angemerkt worden ist.

§. 29.

Aufgabe V.

Es sind alle drei Seiten gegeben, aus denen ein Winkel gefunden werden soll.

Auflösung.

1. Die Aufgabe gehört zur 2ten Complexion: a, A, B, C. Es sind A, B, C gegeben und der der Seite A opponirte Winkel a wird gesucht. Seinen einfachsten Ausdruck giebt die 5te Gleichung: $\cos a=\frac{\cos A-\cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C}$ (§. 22, 3).

2. Für die logarithmische Construction sind sogleich schon, wenn man $\frac{1}{2}(A+B+C)=P$ setzt, die in §. 23, 2 abgeleiteten Formeln sehr anwendbar:

$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{(\sin(P-B)\cdot\sin(P-C):(\sin B\cdot\sin C))}$

oder $\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{(\sin P\cdot\sin(P-A):(\sin B\cdot\sin C))}$.

Wenn der gesuchte Winkel sehr spitz ausfällt, so wählt man vorzugsweise die erste, dagegen, wenn er sich sehr stumpf zeigt, die zweite Formel, weil begreiflich in jenem Falle der $\cos\frac{1}{2}a$, in diesem der $\sin\frac{1}{2}a$, sich nicht beträchtlich ändern.

3. Sonst kann man auch die anfängliche Gleichung auf die bekannte Weise zerlegen. Man hat nehmlich mit ihr auch die folgende:

$$\frac{\cos a\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\cos B\cdot\cos C}{\sin A};$$

setzt man daher $\frac{\cos B\cdot\cos C}{\sin A}=\tang\Phi=\frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}$ (§. 20, F. 5), so folgt:

$\cos a\cdot\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\Phi=\cos A\cdot\cos\Phi-\sin A\cdot\sin\Phi=\cos(A+\Phi)$ (F. 11),

und $\cos a=\frac{\cos(A+\Phi)}{\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\Phi}$.

§. 30.

Aufgabe VI.

Es sind alle drei Winkel gegeben, aus denen eine Seite entwickelt werden soll.

Auflösung.

1. Die Aufgabe gehört zur 3ten Complexion: a, b, c, A. Die Data sind a, b, c und des Winkels a Gegenseite A wird gesucht. Die 9te Gleichung (§. 22, 3), stellt ihren einfachsten Ausdruck dar: $\cos A = \frac{\cos a + \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}$.

2. Zur logarithmischen Entwickelung derselben eignen sich vorzüglich, wenn $\frac{1}{2}(a+b+c) = p$ gesetzt wird, die in §. 23, 3 abgeleiteten Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{-(\cos p . \cos(p-a) : (\sin b . \sin c))}$$

oder $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{(\cos(p-b) . \cos(p-c) : (\sin b . \sin c))}$

von denen in Hinsicht der Wahl dasselbe, was in §. 29, 2 erinnert worden, zu bemerken ist.

3. Oder man kann auch die sonst übliche Zerfällung anwenden: man hat mit der Grundgleichung:

$$\frac{\cos A . \sin b . \sin c}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b . \cos c}{\sin a}$$, setzt hierin

$\frac{\cos b . \cos c}{\sin a} = \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ (§. 20, F. 6), daß mithin

$\cos A . \sin b . \sin c . \sin \varphi = \cos a . \sin \varphi + \sin a . \cos \varphi = \sin(a + \varphi)$

wird (§. 20, F. 9), so ist

$$\cos A = \frac{\sin(a+\varphi)}{\sin b . \sin c . \sin \varphi}.$$

§. 31.

Aufgabe VII.

Es sind zwei Seiten mit einem nicht zwischen ihnen liegenden Winkel gegeben, man sucht den andern nicht eingeschlossenen Winkel.

Auflösung.

Die Aufgabe liegt in der 4ten Complexion: a, A, b, B. Gegeben sind A, b, B, gesucht wird a.

Die Construction dieses Quäsits ist die von Anfang an bekannte und ganz einfache, welche hier in der 11ten Gleichung (§. 22, 3), gegeben ist:

$$\sin a = \sin A \,.\, \sin b : \sin B.$$

Ob aber a spitz oder stumpf sei, kann hier aus bekannten Gründen nicht durch die Vorzeichen entschieden werden, sondern es treten hier die bereits §. 16. III. 1. gebrauchten geometrischen Kennzeichen in Anwendung; nehmlich in Beziehung auf die jetzige Bezeichnung ist

$a < 90°$ wenn $b < 90°$ und $B > A$.
$a > 90°$ wenn $b < 90°$, $A > 90°$ und $B > (180° - A)$
$a < 90°$ wenn $b > 90°$, $A < 90°$ und $B < (180° - A)$
$a > 90°$ wenn $b > 90°$ und $B < A$.

In allen übrigen Fällen, wenn nicht gerade $\sin a = \sin tot$, also $a = 90°$ gefunden wird, kann bekanntlich a eben sowohl kleiner wie größer als 90° sein; vorausgesetzt, daß die Aufgabe nicht vollends überbestimmt und a mithin entweder gar nicht, oder wenigstens nicht in einem Werthe unter 180° möglich ist, von welchen Umständen jedoch auch die obige Gleichung, jenen dadurch, daß sie den $\sin a > \sin tot$, diesen dadurch, daß sie den $\sin a$ mit dem negativen Vorzeichen hergiebt, auf das entschiedenste anzeigt. Vergl. §. 22, 4.

§. 32.

Aufgabe VIII.

Es sind zwei Seiten mit einem nicht zwischen ihnen liegenden Winkel gegeben, man sucht den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel.

Auflösung.

1. Diese Aufgabe fällt wieder in die 1ste Complexion: a, A, b, C. Es sind A, C und a gegeben, b wird gesucht. Das Quäsit findet sich, der Beschaffenheit der Aufgabe gemäß, entweder in einem einzigen bestimmten, oder in zwei zugleich möglichen Werthen aus der Constructionsgleichung Nr. 3. (§. 22, 3)

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}b = \frac{\cos a \,.\, \sin A \pm \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \,.\, \sin C^2)}}{\sin a \,.\, \sin (A + C)}$$

vorausgesetzt, daß die Aufgabe nicht völlig überbestimmt ist, in welchem Fall diese Gleichung auch auf eine unmögliche Größe, oder nur auf Werthe über 180° führt. Vergl. §. 22, 4.

2. Um aber einen, der logarithmischen Construction empfänglicheren Ausdruck zu gewinnen, nimmt man die 1ste Grundgleichung:

$$\cot A \,.\, \sin C = \cos C \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cot a,$$

aus welcher auch die obige Gleichung entstanden, zur Basis. Man hat daraus ferner: $\cot A . \sin C . \operatorname{tang} a = \cos C . \operatorname{tang} a . \cos b + \sin b$ (§. 20, F. 7) und setzt nun:

$$\cos C . \operatorname{tang} a = \operatorname{tang} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \text{ so ist}$$

$$\cot A . \sin C . \operatorname{tang} a = \frac{\sin \varphi . \cos b + \sin b . \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin (b + \varphi)}{\cos \varphi} \text{ (F. 9);}$$

folglich $\sin (b + \varphi) = \cos \varphi . \cot A . \sin C . \operatorname{tang} a =$ $\cos \varphi . \cot A . \operatorname{tang} C . \cos C . \cos C . \operatorname{tang} a$ (F. 3); oder endlich, wenn für $\cos C . \operatorname{tang} a$ der obige Werth $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ substituirt wird:

$$\sin (b + \varphi) = \cot A . \operatorname{tang} C . \sin \varphi.$$

Der Sinn dieser Formeln ist bedeutungsvoll: es wird zuerst φ und darauf in einer zweiten Operation $b + \varphi$ entwickelt, so darf von der letzten Größe nur φ subtrahirt werden, um das unbekannte b selbst zu haben; da aber die Größe $b + \varphi$ nicht nur zwischen 0° und 180°, sondern auch zwischen 180° und 360° liegen kann, so treten von den, mit dem entwickelten $\sin (b + \varphi)$ zusammenhängenden Werthen hier vier auf einmal in die Schranken der trigonometrischen Construction: 1stens die beiden gewöhnlichen unter 180°, wie α und $180° - \alpha$; 2tens die beiden Supplementarwerthe über 180°, nehmlich $180° + \alpha$ und $360° - \alpha$. Aber entweder nur das 1ste oder nur das 2te Paar dieser Werthe kann auf die Wahl kommen, und welches dieses sei, zeigt ganz bestimmt das Vorzeichen des entwickelten Sinus an (§. 19, 5); ist das Zeichen positiv, so sind die beiden Werthe unter 180°, ist es negativ, so sind die beiden Werthe über 180° die allein brauchbaren. Von jedem der beiden solchergestalt allein aufgenommenen Werthen wird nun φ abgezogen; giebt alsdann jede Subtraction einen positiven Werth, der kleiner als 180° ist, so hat man zwei verschiedene Werthe für b gefunden, die gemeinschaftlich gültig, beide der eben hiemit als unbestimmt charakterisirten Aufgabe entsprechen; giebt aber nur die eine Subtraction einen Werth, der positiv und kleiner als 180° ist, während die andere entweder nur einen negativen oder nur einen solchen, der größer als 180° ist, hervorbringt, so ist die Aufgabe bestimmt und jener Werth ist alsdann das einzige, entschiedene, der Forderung Genüge leistende b. — Bei einer völlig überbestimmten Aufgabe würde man entweder gar keinen positiven Werth unter 180° erhalten, oder der Widerspruch würde sich noch früher dadurch offenbaren, daß man den $\sin b + \varphi$, $> \sin$ tot fände.

Alle diese Erscheinungen sind in dem eigenthümlichen Organismus der Analysis

eben so nothwendig begründet, wie diejenigen, welche beim Gebrauche der anfängliche Constructionsgleichung und bei der räumlichen Construction selber statt haben (§. 22, 4).

§. 33.

Aufgabe IX.

Aus zwei Seiten mit einem nicht eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden.

Auflösung.

1. Die Aufgabe gehört zur 2ten Complexion: a, A, B, C. A, B und a sind gegeben, C soll gefunden werden. C ergiebt sich aus der 7ten Gleichung in §. 22, 3:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos a \,.\, \sin B \pm \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \,.\, \sin B^2)}}{\cos A + \cos B}.$$

2. Die Formeln zur logarithmischen Construction sind aus der 2ten Grundgleichung: $\cos A - \cos B \,.\, \cos C = \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a$ abzuleiten. Aus dieser folgt auch:

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \cos a \,\text{tang}\, B \,.\, \sin C + \cos C, \text{ verm. F. 5 in §. 20.}$$

und wenn man $\cos a \,.\, \text{tang}\, B = \cot \Phi = \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi}$ setzt,

so ist $\frac{\cos A \,.\, \sin \Phi}{\cos B} = \sin C \,.\, \cos \Phi + \cos C \,.\, \sin \Phi$,

d. h. verm. F. 9 in §. 20, $\sin(C + \Phi) = \frac{\cos A \,.\, \sin \Phi}{\cos B}$.

Bedeutung und Gebrauch dieser Formeln sind wesentlich dieselben wie in §. 32, 2 und bedürfen daher, nach dem dort beigebrachten, keines weiteren Commentars mehr.

§. 34.

Aufgabe X.

Es sind zwei Winkel mit einer nicht zwischen ihnen liegenden Seite gegeben, man sucht die andere nicht eingeschlossene Seite.

Auflösung.

Die Aufgabe gehört zur 4ten Complexion: a, A, b, B. Es sind a, b, B die gegebenen Stücke, die Construction des gesuchten A wird hier in der bekannten

Einfachheit durch die 12te Gleichung §. 22, 3 gegeben: $\sin A = \sin a . \sin B : \sin b$. und zur Bestimmung der Art des Quäsits sind hier die nehmlichen Kriterien, wie in §. 17. III. 1. erforderlich: also ist jetzt

$A > 90°$ wenn $B > 90°$ und $b < a$

$A < 90°$ wenn $B > 90°$, $a < 90°$ und $b < (180° - a)$

$A > 90°$ wenn $B < 90°$, $a > 90°$ und $b > (180° - a)$

$A < 90°$ wenn $B < 90°$ und $b > a$.

Außerdem, falls nicht etwa $\sin A = \sin \text{tot}$ und daher $A = 90°$, gelten beide Supplementarwerthe von A, sofern nicht vollends bei einer überbestimmten Aufgabe der $\sin A$ größer als der $\sin \text{tot}$ oder negativ wird. Vergl. §. 22, 4.

§. 35.

Aufgabe XI.

Es sind zwei Winkel mit einer nicht zwischen ihnen liegenden Seite gegeben, man sucht die zwischen den Winkeln liegende Seite.

Auflösung.

1. Die Aufgabe fällt in das Gebiet der 1sten Complexion a, A, b, C zurück. Die Data sind: a, b und A. Das Quäsit ist C, dessen Ausdruck in der Gleichung Nr. 4 (§. 22, 3). enthalten:

$$\tang \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin a . \cos A \mp \sqrt{(\sin a^2 - \sin b^2 . \sin A^2)}}{\sin A . \sin (a \div b)}.$$

2. Die für die Anwendung der Logarithmen zu bildenden Formeln fließen aus der 1sten Grundgleichung:

$\cot A . \sin C - \cos C . \cos b = \sin b . \cot a$; daraus hat man:

$\sin C - \cos b . \tang A . \cos C = \sin b . \cot a . \tang A$ (§. 20. F. 7),

und wenn $\cos b . \tang A = \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ gesetzt wird, so erhält man:

$\sin C . \sin \varphi - \cos \varphi . \cos C = \cot a . \tang b . \cos b . \tang A . \sin \varphi$ (§. 20. F. 3);

daher auch, wenn zugleich für $\cos b . \tang A$ der obige Werth $\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ nochmals substituirt wird:

$$-(\cos \varphi . \cos C - \sin \varphi . \sin C) = \cot a . \tang b . \cos \varphi$$

oder: $\cos \varphi . \cos C - \sin \varphi . \sin C = -\cot a . \tang b . \cos \varphi$

und folglich vermöge §. 20, F. 11. zuletzt:

$$\cos (C + \varphi) = -\cot a . \tang b . \cos \varphi.$$

Bedeutung und Gebrauch dieser Formeln sind dem Wesen nach dieselben, wie in §. 32, 2. Weil $C+\Phi$ eben sowohl größer als kleiner wie 180° werden kann, so sind auch an den $\cos(C+\Phi)$ hier wieder vier Werthe, wie α, $180°-\alpha$, $180°+\alpha$ und $360°-\alpha$ gebunden, von denen jedesmal zwei auf die Wahl kommen; nur muß man jetzt wohl berücksichtigen, daß mit einem positiven Cosinus nicht, wie mit einem positiven Sinus, zwei Werthe unter 180°, sondern ein Werth unter 90° und ein Werth zunächst unter 360°, nehmlich α und $360°-\alpha$ zusammen gehören, einem negativen Cosinus dagegen zwei Werthe zunächst unter 180° und 270° entsprechen, nehmlich $80°-\alpha$ und $180°+\alpha$ (§. 19, 5). Nachdem also Φ entwickelt und aus seinem Vorzeichen der Art nach gehörig bestimmt worden, so wird die Größe $\cot a.\tang b.\cos\Phi$ entwickelt und das Vorzeichen derselben nach Maßgabe der Vorzeichen der Factoren entschieden. Ist dieses Vorzeichen an sich selbst schon das negative, so wird es, wegen des allgemeinen negativen Vorzeichens, positiv, also ist alsdann auch der in dieser Größe gefundene $\cos(C+\Phi)$ positiv und es kommen in diesem Falle mithin die Werthe α und $360°-\alpha$ auf die Wahl: ist dagegen das Vorzeichen der Größe $\cot a.\tang b.\cos\Phi$ an und für sich das positive, so wird es durch das allgemeine Vorzeichen negativ, d. h. es sind dann nur die mit dem negativen $\cos(C+\Phi)$ verbundenen Werthe $180°-\alpha$ und $180°+\alpha$ zulässig. — Demnächst aber ergeben sich, eben so wie in §. 32, durch die Subtraction des Φ von jedem der beiden aufgenommenen Werthe, entweder die beiden zugleich gültigen C oder nur ein einziges, oder auch gar keines, das positiv und unter 180° ist, je nachdem die Aufgabe zweideutig oder bestimmt, oder völlig überbestimmt ist, sofern im letzteren Falle der Widerspruch nicht schon früher durch einen $\cos(C+\Phi)>\sin tot$ offenbart ist.

Man hätte auch $\cos b.\tang A=\tang\Phi$ setzen können und würde sodann nach der 10ten Formel in §. 20. einen Ausdruck für die Function der Differenz zwischen dem Quäsit und der Hülfsgröße Φ erhalten haben, welches aber zur Beseitigung von Unsicherheiten und Irrthümern, die begreiflich mit dem Gebrauch solcher Formeln vergesellschaftet sind, hier so wie in allen ähnlichen Fällen mit Absicht vermieden ist.

§. 36.

§. 36.

Aufgabe XII.

Aus zwei Winkeln mit einer nicht zwischen ihnen liegenden Seite den dritten Winkel zu finden.

Auflösung.

1. Die Aufgabe gehört zur 3ten Complexion: a, b, c, A. Gegeben sind: a, b und A; c soll entwickelt werden. Die 10te Gleichung in §. 22, 3 stellt den Ausdruck im Ganzen dar: $\text{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\sin b \cdot \cos A \pm \sqrt{\sin a^2 - \sin b^2 \cdot \sin A^2)}}{\cos a - \cos b}$.

2. Behufs der logarithmischen Construction bildet jetzt wieder die 3te Grundgleichung: $\cos a = \cos A \cdot \sin b \cdot \sin c - \cos b \cdot \cos c$ die Basis. Es ist mit ihr, verm. §. 20, F. 3, zugleich

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos A \cdot \text{tang} b \cdot \sin c - \cos c, \text{ also}$$

wenn $\cos A \cdot \text{tang} b = \text{tang}\,\Phi = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}$ gesetzt wird,

$$\frac{\cos a \cdot \cos\Phi}{\cos b} = \sin\Phi \cdot \sin c - \cos\Phi \cdot \cos c = -(\cos\Phi \cdot \cos c - \sin\Phi \cdot \sin c)$$

$= -\cos(c+\Phi)$, verm. §. 20, F. 11; also endlich auch

$$\cos(c+\Phi) = -\frac{\cos a \cdot \cos\Phi}{\cos b};$$

Formeln von denen dasselbe gilt, was so eben im vorhergehenden Sphen über die dortigen bemerkt worden ist.

Das bisherige des Vortrags enthält Alles, was zu einer gründlichen, möglichst vollständigen Bewältigung des ersten allgemeinen Problems der Sphärentrigonometrie erforderlich ist, sofern es darauf ankommt, aus irgend einer gegebenen Conternation von den sechs Elementen eines sphärischen Dreiecks jedes dadurch bestimmte unbekannte Element desselben Dreiecks zu construiren. Man kann nun nach der genügenden Lösung dieser schon ziemlich umfassenden Aufgabe das Ziel aufs neue weiter stecken und durch Bedingungen, welche so lange ganz unberücksichtigt blieben, das Feld der Untersuchung außerordentlich erweitern. Nimmt man außer jenen sechs ursprünglichen Elementen, welche bis dahin allein die Reihe der gegebenen und gesuchten Stücke ausmachten, noch andere Bestimmungen darin auf, wie die jedesmalige durch einen Perpendikelbogen ausgedrückte Höhe, die Abscissen und Winkel an diesem Perpendikelbogen, den jedesmaligen Flächeninhalt des Dreiecks, desgleichen auch Summen und Differenzen der Elemente eines und desselben oder verschiedener Dreiecke, so entfaltet sich damit begreiflich eine ungleich größere Zahl von Combinationen und eine Menge von Aufgaben, die großentheils noch von Niemand gelöst und ohne unverhältnißmäßige Weitläuftigkeit oder ohne Ungründlichkeit nicht anders, als nur durch Hülfe der Analysis des Unendlichen zu bezwingen sind. Dahin gehört auch das in der Vorrede erwähnte, höchst merkwürdige Problem der Zurückführung der Ebenentrigonometrie in die Sphärentrigonometrie, das zwar historisch aufgefunden und durch Induction unleugbar bestätigt, aber mit einer absoluten Demonstration, welche allein aus den Principien des Differentialcalculs zu schöpfen ist, noch nirgend umfaßt ist. Die Untersuchung muß daher, wenn sie zu diesen Gegenständen fortgeführt werden soll, einen neuen, veränderten Gang nehmen und alles dahin gehörige liegt als ein eigenthümliches Ganze außer den Gränzen des gegenwärtigen, ohnehin schon beträchtlich angewachsenen und gleichfalls in sich abgeschlossenen Lehrbuchs und kann nur einer etwannigen Fortsetzung des letzteren aufbehalten bleiben. Es findet daher hier nur noch eine

Sammlung numerischer Aufgaben und Auflösungen

Platz, welche so lange, um die Aufmerksamkeit auf die Gründe der bisherigen Entwickelungen und ihren Zusammenhang nicht zu theilen, absichtlich zurück gehalten sind, jetzt aber am Schlusse, zur Wiederholung und vollständigeren Beherrschung des Ganzen dem Schüler um so nützlicher und willkommner sein werden *).

I. Numerische Aufgaben, bei welchen ein rechter Winkel unter den Datis vorkommt.

1. Die Katheten $B=55°$, $P=40°$ sind gegeben; der dem P entgegen stehende Winkel p wird gesucht.

Auflösung. Vermöge Nr. 1. d. 1sten Tab. hat man:

19,9238135	= log tang P + log sin tot
9,9133645	= log sin B, subt.
10,0104490	= log tang p
10,0103601	= log tang 45° 41′ subtr.
889 : (diff. 1″ = 42,12)	= 21,1″ add.

$p = 45° 41' - 21{,}1''$

bleibt spitz, weil $P < 90°$.

2. Aus eben den Katheten $B=55°$, $P=40°$ die Hypotenuse H zu finden.

Auflös. Nach Nr. 3. d. 1sten Tab.

0,8842540 — 1	= log cos P — log sin tot
9,7585913	= log cos B. add.
9,6428453	= log cos H
9,6426182	= log cos 63° 57′ subtr.
2271 : (diff. 1″ = 43,06)	= 52,7″ subtr.

$H = 63° 56' 7{,}3''$; bleibt kleiner als 90°, weil P und B gleichartig sind.

*) Es ist bei diesen Entwickelungen das allgemein bekannte logarithmisch-trigonometrische Handbuch von Vega zum Grunde gelegt; daß der unumschränkte Gebrauch desselben dem Schüler völlig klar und geläufig sein müsse, versteht sich um so mehr von selbst, da durch die Einleitung zu jenem Buche für dessen Zugänglichkeit möglichst gesorgt ist.

3. Gegeben ist ein Winkel p = 64° 38′ 1″ u. der anliegende Kathet B = 42° 8′ 24″; man sucht den andern Kathet P.

Aufl. Nach Nr. 4. in Tab. 1.

9,8266307 = log sin 42 8′ 10,3241097 = log tang 64° 38′

558 = (diff. 1″ = 23 . 27) × 24 . add. 54 = (diff. 1″ = 54,41) × 1 . add.

9,8266865 = log sin B. 10,3241151 = log tang p.

0,3241151 = log tang p − log sin tot . add.

10,1508016 = log tang P

10,1507464 = log tang 54° 45′ subtr.

552 : (diff. 1″ = 44,68) = 12,3″ add.

P = 54° 45′ 12,3″; bleibt kleiner als 90° weil p spiß ist.

4. Aus eben dem Winkel p = 64° 38′ 1″ und dem anlieg. Kathete B = 42° 8′ 24″ den andern Winkel b zu finden.

Auflös. Nach Nr. 5. der 1sten Tab.

9,9559699 = log sin p 9,8701156 = log cos 42° 8′

0,8701156 − 1 = log cos B − log sin tot . ad. 457 = (diff. 1″ = 19,05) × 24 subt.

9,8 6 855 = log cos b 9,8701156 = log cos B.

9,8260715 = log cos 47° 56′ subtr.

140 : (diff. 1″ = 23,32) = 6″ subtr.

b = 47° 55′ 54″; bleibt spiß, weil B < 90.

5. Aus den vorigen Datis p = 64° 38′ 1″ und B = 42° 8′ 24″ die Hypotenuse H zu finden.

Aufl. Nach Nr. 6. der 1sten Tabelle.

9,6318547 = log cos p 10,0435306 = log cot 42° 8′

0,0434290 = log cot B − log sin tot. add. 1016 = (diff. 1″ = 42,32) × 24. subt.

9,6752837 = log cot H 10,0434290 = log cot B.

9,6752372 = log cot 64° 40′ subtr.

465 : (diff. 1″ = 54,43) = 8,5″ subtr.

H = 64° 39′ 51,5″; bleibt kleiner als 90°, weil p und B gleichartig sind.

6. Die beiden Winkel p = 110° 5′; b = 42° 36′ sind gegeben; es soll der Kathet P gefunden werden.

Auflös. Nach Nr. 10. d. 1sten Tab.

9,5357832 = log cos p = log cos (180° − 110° 5′) = log cos 69° 55′
9,9305091 = log sin b subtr. und log sin tot add.

9,7052741 = log cos P
9,705 543 = log cos 59° 31′ subtr.

198 : (diff. 1″ = 35,76) = 5,5″ subtr.

59° 30′ 54,5″ von 180° subtr.
P = 120° 29′ 5,5″; ist größer als 90°, weil p stumpf ist.

7. Aus denselben Winkeln p = 110° 5′ u. b = 42° 36′ die Hypoten. H zu finden.

Auflös. Nach Nr. 12. d. 1sten Tab.

9,5630278 = log cot p
0,0364260 = log cot b — log sin tot. add.

9,5994538 = log cos H
9,599 441 = log cos 66° 35′ subtr.

2097 : (diff. 1″ = 48,60) = 43,1″ subtr.

66° 34′ 16,9″ von 180° subtr.
H = 113° 25′ 43,1″; ist größer als 90°, weil p und b ungleichartig sind.

8. Es ist die Hypotenuse H = 115° 20′ 8,5″ und ein Kathet P = 54° 45′ 12,3″ gegeben; man verlangt den dem letzteren gegenüberstehenden Winkel p.

Auflös. Nach Nr. 13. d. 1sten Tab.

9,9120315 = log sin 54° 45′
183 = (diff. 1″ = 14,88) × 12,3 ad.
19,9120498 = log sin P + log sin tot
9,9560800 = log sin H subtr.
9,9559698 = log sin p
9,9559688 = log sin 64° 38′ subtr.
10 : (diff. 1″ = 9,98) = 1″ add.
p = 64° 38′ 1″; bleibt spitz, weil P < 90°. (Vergl. Aufg. Nr. 3 und Nr. 5.)

9,9560287 = sin 64° 39′
513 = (diff. 1″ = 9,97) × 51,5 add.
9,9560800 log sin H = log sin 64° 39′ 51,5″
= log sin (180° − 115° 20′ 8,5″)

9. Aus vorstehenden Datis: H = 115° 20′ 8,5″; P = 54° 45′ 12,3″ den anderen Katheten B zu finden.

Auflös. Nach Nr. 14. in Tab. 1.

9,6315926 = log cos 64° 39′ 9,7612851 = log cos 54° 45′

2290 = (diff. 1″ = 44,46) × 51,5 sub. 366 = (diff. 1″ = 29,80) × 12,3 sub.

19,6313636 = log cos H + log sin tot 9,7612485 = log cos P

9,7612485 = log cos P subtr.

9,8701151 = log cos B

9,8700470 = log cos 42° 9′ subtr.

681 : (diff. 1″ = 19,05) = 35″ subtr.

42° 8′ 24″ von 180° abgezogen:

B = 137° 51′ 35″; ist gröſser als 90°, weil H und P ungleichartig sind. (Vergl. Aufg. Nr. 3 und Nr. 5.)

10. Aus einem Winkel b = 137° 24′ und der Hypotenuse H = 66° 34′ 16,9″ den anderen Winkel p zu finden.

Auflös. Verm. Nr. 23, Tab. 1. hat man:

9,5994538 = log cos H; ferner ist:

0,9635740 — 1 = long tang b — log sin tot. add.

9,5630278 = log cot p = log cot 69° 55′; letzterer Werth von 180° abgezogen, giebt p = 110° 5′; stumpf, weil b und H ungleichartig sind. (Vergl. Aufg. Nr. 7.)

11. Aus einem Winkel b = 5° 0′ 12″ und dem gegenüberliegenden Katheten B = 5° 0′ 12,1″ den andern Katheten P zu finden.

Verm. §. 39; 1. II. G. 4. in der Sphärengeom. wo L das gegenwärtige B, l das jetzige b darstellt, weiß man schon, daß die Aufgabe überbestimmt ist; eben das aber muß sich auch in der trigonometrischen Construction offenbaren, wie folgendes zeigt: Zufolge Nr. 29. in Tab. 1. ist

8,9421942 = log tang 5° 0′ 12″ 8,9421942 = log tang 5° 0′ 10″

509 = (diff. 1″ = 242,3) × 2,1 add. 485 = (diff. 1″ = 242,3) × 2 add.

18,9422451 = log tang B + log sin tot 8,9422427 = log tang b

8,9422427 = log tang b subtr.

10,0000024 = log sin P, welches widersprechend ist, weil schon 10,0000000 = log sin tot das Maximum für den Logarithmus eines jeden Sinus ist.

12. Wenn in obiger Aufgabe der Kathet B nicht um die $\frac{1}{10}$ Secunde größer als der Winkel b, sondern lezterem gleich wäre, so würde man begreiflich 10,0000000 = log sin P = log sin tot, also P = 90° erhalten, wie es der Vorschrift auf der Tabelle und §. 31, 2 der Sphärengeometrie gemäß sein muß.

13. Wenn aber b = 5° 0′ 12″ und B = 1° 17′ 23″ gegeben ist, so findet man P verm. Nr. 29. in Tab. 1. folgendermaßen:

8,3521661 = log tang 1° 17′ 20″
280 = (log 4643 — log 4640) Prop. th. wegen 3″; add.

18,3524408 = log tang B + log sin tot
8,9422427 = log tang b subtr.

9,4102041 = log sin P
9,4101575 = log sin 14° 54′ subtr.

466 : (diff. 1″ = 79,09) 5,8″ add.

P = 14° 54′ 5,8″ oder auch
P = 165° 5′ 54,2″ dem Supplementarwerth des obigen.

14. Aus den obigen Datis: b = 5° 0′ 12″ und B = 1° 17′ 23″ den andern Winkel p zu finden.

Auflös. Verm. Nr. 30. der 1sten Tab.

9,9983424 = log cos 5° 0′ 10″ 9,9998902 = log cos 1° 17′ 20″
4 = Prop. th. für 2″. subtr. 2 = Prop. th. für 3″. subtr.

19,9983420 = log cos b + log sin tot 9,9998899 = log cos B,
9,9998899 = log cos B. subtr.

9,9984521 = log sin p
9,9984511 = log sin 85° 9′ 50″. subtr.

10 : (diff. 1″ = 1,8) = 5,5″ add.

p = 85° 9′ 55,5″ oder auch
p = 94° 50′ 4,5″ dem Supplemente des obigen Werths.

II. Numerische Aufgaben, bei welchen ein Quadrant unter den Datis vorkommt.

Da es hiebei nur auf eine richtige, der 1sten Tabelle entsprechende Benennung der Elemente ankommt, wie sie auf dem Titel dieser Tabelle (nach Anleitung des 8ten Sphen angegeben ist), und das Verfahren im übrigen, bis auf die Vertauschung der

Prädikate: gleichartig und ungleichartig, ganz daſſelbe iſt, wie bei der Auflöſung der Aufgaben der vorhergehenden Kategorie, ſo genügen wenige Beiſpiele.

1. In einem ſphäriſchen Dreiecke iſt außer dem Quadranten noch eine zweite Seite = 150° und ein von letzterer und dem Quadranten eingeſchloſſener Winkel = 87° gegeben; man ſucht den dem Quadranten gegenüber liegenden Winkel.

Auflöſ. Der gegebene Winkel heiße B, ſo muß die gegebene Seite p genannt werden; der Gegenwinkel des Quadranten heißt H und man wird daher aus B = 87° und p = 150° das Quäſit H nach Nr. 6. der 1ſten Tabelle berechnen, wie folgt:

9,9375306 = log cos p
8,7193958 = log cot B add. und log sin tot ſubtr.

8,6569264 = log cot H
8,6566841 = log cot 87° 24′ 10″ ſubtr.

2423 : (diff. 1″ = 464.9) = 5,2″ ſubtr.

H = 87° 24′ 4,8″, bleibt ſpiß, weil p und B ungleichartig ſind.

2. Der dem Quadranten gegenüberſtehende Winkel H = 0° 45′ 25″ und eine Seite b = 19° 59′ 15″ ſind gegeben; man ſucht den dieſer Seite anliegenden Winkel.

Auflöſ. — Der geſuchte Winkel muß durch P bezeichnet werden, ſo ergiebt ſich derſelbe verm. Nr. 24. in Tab. 1. folgendermaßen:

11,8798311 = log cot 0° 46′ 20″
7976 = (log 2725 — log 2720) ſub.

21,8790335 = log cot H + log sin tot
9,9730203 = log cos b ſubtr.

11,9060132 = log cot P
11,9044695 = log cot 0° 42′ 50″ = log cot 2570″

15437 dieſer Unterſchied ſubtrahirt von
3,4099331 = log. 2570″ giebt:

3,4083894 = log. 2560,9″

9,9730318 = log cos 19° 59′
115 = (diff. 1″ = 7,66) × 15 ſubtr.

9,9730203 = log cos b

2560,9″ = 0° 42′ 40,9″ deren Supplement
giebt P = 179° 17′ 19,1″ iſt ſtumpf,
weil H und b gleichartig ſind.

3. Aus

3. Aus den obigen Data: H = 0° 45′ 25″ und b = 19° 59′ 15″ wird der der letztern Seite b entgegenstehende Winkel B gesucht.

Auflös. — Vermöge Nr. 22. der 1sten Tab.

8,1201512 = log sin 0° 45′ 20″ 9,5337044 = log sin 19° 59′

7976 = (log 2725 — log 2700) add. 868 = (diff. 1″ = 57,88) × 15 add.

8,1209288 = log sin H 9,5337912 = log sin b

9,5337912 = log sin b add. und log sin tot subtr.

7,6547200 = log sin B

7,6540563 = log sin 0° 15′ 30″ = log sin 930″

6637 zu diesem Unterschiede addirt:

2,9684829 = log 930″ giebt:

2,9691466 = log 931,4″

931,4″ giebt:

B = 0° 15′ 31,4″ bleibt spiß, weil b < 90°.

4. Aus einer Seite b = 19° 59′ 15″ und ihrem Gegenwinkel B = 0° 15′ 31,4″ den von eben der Seite und dem Quadranten eingeschlossenen Winkel zu finden.

Auflös. Der Winkel heißt P und ergiebt sich verm. Nr. 29. in Tab. 1.

7,6540608 = log tang 0° 15′ 30″ = log tang 930″ 9,5606727 = log tang 19° 59′

6533 = (log 931,4 — log 930) add. 983 = (diff. 1″ = 65,54) × 15 add.

17,6547141 = log tang B + log sin tot 9,5607710 = log tang b

9,5607710 = log tang b subtr.

8,0939431 = log sin P

8,0938037 = log sin 0° 42′ 40″ = log sin 2560″

1394 zu diesem Unterschiede add.

3,4082400 = log 2560″ giebt:

3,4083794 = log 2560,8″

2560,8″

giebt P = 0° 42′ 40,8″ (vergl. Aufg. Nr. 2.)

oder auch P = 179° 17′ 19,2″ d. Suppl. des obigen Werths, (der Vorschrift in d. Tab. und dem §. 38, 1. II. D. 3. der Sphärengeometrie gemäß, wo L den Quadran-

$(180° - A) = 83° 59' 40''$
$9{,}0228338 = \log \cot 83° 59'$
$8092 = (\text{diff. } 1'' = 202{,}31) \times 40$ subt.

$19{,}0220246 = \log \cot A + \log \sin \text{tot.}$
$9{,}9568623 = \log \cos c$ subt.

$9{,}0651623 = \log \cot M$
$9{,}0644533 = \log \cot 83° 23'$ subt.

$7090 : (\text{diff. } 1'' = 183{,}77) = 38{,}6$ subt.

$85° 22' 21{,}4''$ dessen Supplement giebt
$M = 96° 37' 38{,}6''$ größer als 90° weil c u. g. A.
$32° 15' 0'' = B$ subt.

$N = 64° 22' 38{,}6''$

$9{,}9970829 = \log \sin 83° 22'$ $\quad$ $9{,}9550047 = \log \sin 64° 22'$
$52 = (\text{diff. } 1'' = 2{,}45) \times 21{,}4$ add. $\quad$ $390 = (\text{diff. } 1'' = 10{,}10) \times 38{,}6$ add.

$9{,}9970881 = \log \sin M$ $\quad$ $9{,}9550437 = \log \sin N$
$9{,}6709774 = \log \text{tang } c$ add.
$0{,}0449563 =$ det. Ergänz. $\log \sin N$ add.

$9{,}7130218 = \log \text{tang } a$
$9{,}7127662 = \log \text{tang } 27° 18'$ subt.

$2556 : (\text{diff. } 1'' = 51{,}65) = 49{,}5''$ add.

$27° 18' 49{,}5''$ dessen Supplement giebt
$a = 152° 41' 10{,}5''$ ist stumpf, weil es, wegen $M > B$, mit c, welches spiz ist, ungleichartig sein muß.

Auflös. II. Construction desselben Quäsits nach der analytischen für den sin tot = 1 eingerichteten 8ten Tabelle.

Die gegebenen Seiten sind dort A und C genannt, durch welchen von beiden Buchstaben die größere bezeichnet werde, ist willkührlich; der gegebene Winkel heißt b; man hat daher:

$A = 96° 0' 20''$; $C = 32° 15'$; $b = 25° 7'$; hiernächst:

0,9568623 — 1 = log cos b (180° — A') = 83° 59′ 40″
0,9779754 = log tang A add. 0,9771662 = log tang 83° 59′.
8092 = (diff 1″ = 202,31) × 40 add.
0,9348377 = log cot φ 0,9779754 = log tang A
0,9344444 = log cot 6° 38′ subt.
3933 : (diff. 1″ = 183,77) = 21,4″ subt.

6° 37′ 38,6″ deſſen Supplement giebt
φ = 173° 22′ 21,4″ iſt größer als 90°, weil wegen A > 90° und b < 90°, die tang A negativ, der cos b poſitiv, folglich das Product: cos b . tang A d. h. die cot φ negativ, mithin φ > 90° iſt.

0,9970976 — 1 = log cos 6° 37′ φ = 173° 22′ 21,4″
94 = (diff. 1″ = 2,45) × 38,6 subt. C = 32° 15′ 0″
0,9970882 — 1 = log cos φ C + φ = 205° 37′ 21,4″
9,6709774 — 1 = log tang b add. (C + φ) — 180° = 25° 37′ 21,4″
10,0449563 = def. Erg. log cos (C+φ) 0,9550653 — 1 = log cos 25° 37′
0,7130219 — 1 = log tang a 216 = (diff. 1″ = 10,10) × 21,4 subt.
9,7127662 — 1 = log tang 27° 18′ 0,9550437 — 1 = log cos (C + φ)
2557 : (diff. 1″ = 51,65) = 49,5″ add.

27° 18′ 49,5″ deſſen Supplement giebt
a = 152° 41′ 10,5″ wie vorhin. Die Gründe, aus denen a ſtumpf iſt, ſind hier folgende: weil φ > 90° alſo cos φ negativ, b < 90°, alſo tang b poſitiv iſt: ſo iſt der Dividend. tang b . cos φ negativ; weil ferner C + φ zwiſchen 180° und 270° liegt, ſo iſt der Diviſor cos (C + φ) auch negativ; folglich der Quotient an und für ſich poſitiv; er wird alſo durch das herrſchende Vorzeichen negativ, alſo iſt die tang a negativ d. h. a ſtumpf.

4. Aus den obigen Datis: A = 96° 0′ 20″; C = 32° 15′ und b = 25° 9′ die beiden unbekannten Winkel des Dreiecks zugleich zu finden.

Auflöſ. Nach Maßgabe der 8ten Tafel nimmt man zuerſt:
½ b = 12° 33′ 30″; ½ (A — C) = 31° 52′ 40″; ½ (A + C) = 64° 7′ 40″;

ſodann hat man ferner:

0,6524546 = log cot 12° 33′
2977 = (diff. 1″ = 99,02) × 30 ſub.
0,6521569 = log cot ½ b
0,9289980 − 1 = log cos ½ (A − C) add.
10,3601495 = def. Erg. log cos ½ (A + C) ad.
0,9413044 = log tang σ
0,9410998 = log tang 83° 28′ ſubt.
2046 : (diff. 1″ = 186,53) = 11″ add.
σ = 83° 28′ 11″ bleibt ſpitz, weil alle Factoren poſitiv ſind.

0,9290504 − 1 = log cos 31° 52′
524 = (diff. 1″ = 13,09) × 40 ſub.
0,9289980 − 1 = log cos ½ (A − C).
0,6400241 − 1 = log cos 64° 7′
1736 = (diff. 1″ = 43,41) × 40 ſubt.
0,6398505 − 1 = log cos ½ (A + C)

0,6521569 = log cot ½ b
0,7227235 − 1 = log sin ½ (A − C) add.
10,0458688 = def. Erg. log sin ½ (A + C) ad.
0,4207492 = log tang δ
0,4203714 = log tang 69° 12′ ſubt.
3778 : (diff. ″ = 63,45) = 59,5″ add.
δ = 69° 12′ 59,5″
σ + δ = a = 152° 41′ 10,5″ wie oben.
σ − δ = c = 14° 15′ 11,5″

0,7225881 − 1 = log sin 31° 52′
1354 = (diff. 1″ = 33,86) × 40 add.
0,7227235 − 1 = log sin ½ (A − C)
0,9540904 − 1 = log sin 64° 7′
408 = (diff. 1″ = 10,21) × 40 ad.
0,9541312 − = log sin ½ (A + C)

5. Aus denſelben Datis A = 96° 0′ 20″; B = 32° 15′ und c = 25° 9′ die unbekannte Seite C zu finden.

Auflöſ. I. Zufolge der Vorſchrift in der 3ten Abtheilung der 3ten Tabelle nimmt man M und N eben ſo, wie ſie in der 1ſten Auflöſung der Aufgabe Nr. 3. gefunden ſind.

$N = 64° 22' 38,6''$ | $180° - M = 83° 22' 21,4''$

$9,6360969 = \log\cos 64° 22'$ | $9,0626386 = \log\cos 83° 22'$

$1695 = (\text{diff. } 1'' = 43,90) \times 38,6$ subt. | $3880 = (\text{diff. } 1'' = 181,32) \times 21,4$ subt.

$9,6359274 = \log\cos N$ | $9,0622506 = \log\cos M$

$9,0196344 = \log\cos A$ add.

$0,9377494 =$ dek. Erg. $\log\cos M$ add. | $180° - A = 83° 59' 40''$

$9,9204348 = \log\cos 83° 59'$

$9,6933112 = \log\cos C$ | $8004 = (\text{diff. } 1'' = 200,09) \times 40$ subt.

$9,5930666 = \log\cos 66° 56'$ subt. | $9,0196344 = \log\cos A$

$2446 : (\text{diff. } 1'' = 49,43) = 49,5''$ subt.

$C = 66° 55' 10,5''$ bleibt kleiner als 90°, weil N mit φ gleichartig ist.

Auflös. II. Eben das Quäsit wird nach der 4ten Formel in der hieher gehörigen Abtheilung der 8ten Tafel construirt.

Dem gemäß heißt wieder die eine Seite: $A = 96° 0' 20''$; die andere: $C = 32° 15'$; der gegebene Winkel: $b = 25° 9'$ und die gesuchte Seite: B findet sich folgendermaßen:

es ist so wie in Auflösung II. der Aufgabe Nr. 3.

$\varphi = 173° 22' 21,4''$ und $(180 - \varphi) = 6° 37' 38,6''$

$(C + \varphi) = 205° 37' 21,4''$ und $(C + \varphi) - 180° = 25° 37' 21,4''$; hiernächst:

$0,0196344 - 1 = \log\cos A$ | $0,6358335 - 1 = \log\sin 25° 37'$

$0,6359274 - 1 = \log\sin(C + \varphi)$ add. | $939 = (\text{diff. } 1'' = 43,90) \times 21,4$ add.

$10,9377492 =$ dek. Erg. $\log\sin\varphi$ add. | $0,6359274 - 1 = \log\sin(C + \varphi)$

$0,6933110 - 1 = \log\cos B$ | $0,0615509 - 1 = \log\sin 6° 37'$

$0,5930666 - 1 = \log\cos 66° 56'$ subt. | $6999 = \text{diff. } 1'' = 181,32) \times 38,6$ add.

$0,0622508 - 1 = \log\sin\varphi$

$2444 : (\text{diff. } 1'' = 49,43) = 49,4''$ subt.

$B = 66° 55' 10,6''$ bleibt spiz; weil der $\cos A$ negativ, der $\sin(C + \varphi)$ gleichfalls negativ, der $\sin\varphi$ positiv, mithin der ganze Ausdruck des $\cos B$ positiv ist. Es ist hier dieser logarithmische Cosinus des Quäsits bis auf zwei Einheiten in der lezten Decimalstelle von dem in der vorigen Auflösung verschieden, welches aber auf das Hauptresultat nur einen Einfluß von $\frac{1}{10}$ Secunde Differenz hat; übrigens sieht man bald, daß überhaupt die Hülfsgrößen der ge-

genwärtigen Auflösung zwar nicht der absoluten Größe, aber doch den logarithmisch-trigonometrischen Functionen nach dieselben mit den in der vorhergehenden Auflösung durch M und N bezeichneten sind.

Für die Bestimmung des Unbekannten aus zwei Winkeln mit einer zwischen ihnen liegenden Seite mag folgendes Beispiel hinreichend sein.

6. Eine Seite ist 3° 0′ 16″ und die beiden anliegenden Winkel sind 97° 5′ und 86° 0′ 20″; es soll der Gegenwinkel der gegebenen Seite entwickelt werden.

Auflös. Da man erwarten kann, daß der gesuchte Winkel sehr spitz ausfallen werde, so würde seine Entwickelung aus dem Cosinus nach der 3ten Tabelle nicht so vortheilhaft sein, als nach der 5ten unter den für den Winkel b in der 2ten Hauptabtheilung der 8ten Tabelle ausgesetzten Formeln, wo eben dieser Winkel aus dem Sinus seiner Hälfte gefunden wird. Man setzt daher:
a = 97° 5′; c = 86° 0′ 20″; B = 3° 0′ 16″ und der gesuchte Winkel heißt b; so ist:

$\frac{1}{2}B = 1° 30' 8''$ $\qquad$ $a + c = 183° 5' 20''$

0,4179190 − 2 = log sin 1° 30′ $\qquad$ $\frac{1}{2}(a+c) = 91° 32' 40''$

6426 = (diff. 1″ = 803,3) × 8 add. $\qquad$ $180° - \frac{1}{2}(a+c) = 88° 27' 20''$

0,4185616 − 2 = log sin $\frac{1}{2}$B $\qquad$ 0,9998422 − 1 = log sin $\frac{1}{2}(a+c)$

0,9983363 − 1 = $\frac{1}{2}$ log sin a add.

0,9994718 − 1 = log sin c add.

10,0001578 = def. Erg. log sin $\frac{1}{2}(a+c)$ add.

0,4165175 − 2 = log tang ψ

0,4164556 − 2 = log tang 1° 29′ 4″ subt.

619 : (diff. 1″ = 806,9) = 0,8″ add.

$\psi = 1° 29' 40,8''$

0,4305971 − 2 = log cos $\frac{1}{2}(a+c)$ $\qquad$ 0,9998525 − 1 = log cos 1° 29′ 40″

0,9998523 − 1 = log cos ψ subtr. $\qquad$ 0,4 = (diff. 1″ = 0,6) × 0,8

0,4307448 − 2 = log sin $\frac{1}{2}$b $\qquad$ 0,9998523 − 1 = log cos ψ

0,4305971 − 2 = log sin 1° 32′ 40″ subtr.

1477 : (diff. 1″ = 780,2) = 1,9″ add.

$\frac{1}{2}b = 1° 32' 41,9''$ also:

$b = 3° 5' 23,8''$.

7. Den

7. Den Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks zu finden, dessen Seite = 60° ist.

Auflös. Nach der letzten Formel in der 1sten Abth. der 4ten Tab.

19,6989700 = log sin ½ A + log sin tot, indem A die Seite = 60° bezeichnet.
9,9375306 = log sin A = log cos ½ A. subtr.

9,7614394 = log sin ½ a
9,7612851 = log sin 35° 15' subtr.

1543 : (diff. 1" = 29,78) = 51,8" add.

½ a = 35° 15' 51,8" also der gesuchte
Winkel a = 79° 31' 43,6".

8. Aus den drei Seiten A = 62° 21' 8,4"; B = 55°; C = 36° den größesten Winkel a des Dreiecks zu finden.

Auflös. I. Nach der 1sten Formel der 3ten Abth. der 4ten Tab.

½ (A + B) = 58° 40' 34,2" ½ (A − B) = 3° 40' 34,2"
10,2155206 = log tang 58° 40' 8,8077309 = log tang 3° 40' 30"
1621 = (diff. 1" = 47,41) × 34,2 add. 1382 = (diff. 1" = 329) × 4,2 add.

10,2156827 = log tang ½ (A + B) 8,8078691 = log tang ½ (A − B)
8,8078691 = log tang ½ (A − B) add. ½ C = 18°
0,4882240 = der Erg. log tang ½ C add. 9,5117760 = log tang ½ C.

9,5117758 = log tang τ
9,5113460 = log tang 17° 59' subtr.

4298 : (diff. 1" = 71,68) = 60" add.

τ = 18° = ½ C; also, wegen (A + B) < 180°,
M = ½ C + τ = C = 36° und N = ½ C − τ = ½ C − ½ C = 0; folglich a = 90°,
und die drei Seiten gehören einem rechtwinkligen Dreiecke an, dessen Hypotenuse A, dessen Katheten B und C sind.

Auflös. II. Nach der vorletzten Formel in der 3ten Hauptabtheilung der 8ten Tabelle. Die obigen Zeichen behalten ihre Bedeutung.

Man nimt $153^\circ 21' 8{,}4'' = A + B + C$ und $76^\circ 40' 34{,}2'' = \frac{1}{2}(A + B + C) = P$

$0{,}9881529 - 1 = \log \sin 76^\circ 40'$ $\qquad$ $62^\circ 21' 8{,}4'' = A$. subtr.

$171 = (\text{diff. } 1'' = 4{,}99) \times 34{,}2$ ad. $\qquad$ $14^\circ 19' 25{,}8'' = P - A$

$0{,}9881500 - 1 = \log \sin P$ $\qquad$ $0{,}3931905 - 1 = \log \sin 14^\circ 19'$

$0{,}3934032 - 1 = \log \sin (P - A)$ add. $\qquad$ $2127 = (\text{diff. } 1'' = 82{,}46) \times 25{,}8$ add.

$10{,}0866355 =$ dek. Erg. $\log \sin B$ add. $\qquad$ $0{,}3934032 - 1 = \log \sin (P - A)$

$10{,}23078\ 3 =$ dek. Erg. $\log \sin C$ add.

$1{,}6989700 - 2 = \log (\cos \frac{1}{2} a)^2$; mit 2 divid.

$0{,}8494850 - 1 = \log \cos \frac{1}{2} a = \cos 45^\circ$; also:

$a = 90^\circ$.

9. Aus den drei Seiten: $A = 63^\circ 56' 7{,}3''$; $B = 55^\circ$; $C = 40^\circ$ den kleinsten Winkel c zu finden.

Auflös. Nach der 1sten Formel für den Winkel c in der 3ten Abtheilung der 4ten Tabelle.

$\frac{1}{2}(A + C) = 51^\circ 58' 3{,}65''$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(A - C) = 11^\circ 58' 3{,}65''$

$10{,}1066694 = \log \operatorname{tang} 51^\circ 58'$ $\qquad$ $9{,}3262305 = \log \operatorname{tang} 11^\circ 58'$

$158 = (\text{diff. } 1'' = 43{,}39) \times 3{,}65$ ad. $\qquad$ $379 = (\text{diff. } 1'' = 103{,}75) \cdot 3{,}65$ add.

$10{,}1066852 = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + C)$ $\qquad$ $9{,}3262684 = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - C)$

$9{,}3262684 = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - C)$ add. $\qquad$ $\frac{1}{2} B = 27^\circ 30'$

$0{,}2835233 =$ dek. Erg. $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} B$ add. $\qquad$ $9{,}7164767 = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} B$.

$9{,}7164766 = \log \operatorname{tang} \tau$

$9{,}7164767 = \log \operatorname{tang}\ 27^\circ\ 30'$ subt.

$2 : (\text{diff. } 1'' = 51{,}40) = 0{,}0''$ mithin:

$\tau = 27^\circ 30' = \frac{1}{2} B$, woraus sichtbar wird, daß man es hier wieder mit einem rechtwinkligen Dreiecke zu thun habe (§. 14. III. 3.). Wegen $(A + C) < 180^\circ$ ist $M = \frac{1}{2} B + \tau = B$; $N = \frac{1}{2} B - \tau = 0$.

9,6894631 = log cot 63° 56′ d)
590 = (diff. 1″ = 55,36) × 7,3 subtr.

19,6894241 = log cot A + log sin tot.
9,8452268 = log cot M subtr.

9,8441973 = log cos c
9,8441137 = log cos 45° 42′ subtr.

856 = (diff. 1″ = 21,57) = 38,8″ subtr.

c = 45° 41′ 21,2″ bleibt spiß,
weil c, wegen N = o, mit G gleichartig ist.

Vergl. die Aufg. I, 1 und 2; die Resultate stimmen bis auf $\frac{1}{10}$ Secunde überein.

10. Die Seite A eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks zu finden, dessen Winkel a = 70° 31′ 43,6″ ist.

Auflös. Nach der vorletzten Formel in der 1sten Abtheilung der 5ten Tabelle.

$\frac{1}{2}$a = 35° 15′ 51,8″ 10,4512529 = log tang 70° 31′
10,1507464 = log cot 35° 15′ 2921 = (diff. 1″ = 66,99) × 43,6 ad.
2314 = (dif. 1″ = 44,67) × 51,8 sbt. 19,4515450 = log tang a

20,1505150 = log cot $\frac{1}{2}$a + log sin tot.
10,4515450 = log tang a subtr.

9,6989700 = log cos A = log cos 60°; also
A = 60°, bleibt kleiner als 90°, weil a spiß ist.
Vergl. Aufg. Nr. 7.

11. Aus den drei Winkeln: a = 179° 17′ 19,1″; b = 0° 45′ 25″; c = 0° 15′ 51,4″ die kleinste Seite C und nächst größere B des Dreiecks zu finden.

Auflös. Nach Formeln der 3ten Abtheil. der 5ten Tab. und zwar bedient man sich, indem zuerst G entwickelt wird, der vorletzten Formel, um sodann B gleichfalls aus seiner vorletzten Formel, welche dieselben Hülfsgrößen, wie jene enthält, vortheilhaft finden zu können. — Es ist:

$\frac{1}{2}(b+c) = 0^\circ\,30'\,28{,}2''$

$12{,}0543425 = \log\cot 0^\circ\,30'\,20''$
$= \log\cot 1820''$

$19523 = (\log 1828{,}2 - \log 1820)$ sbt.

$12{,}0523902 = \log\cot\frac{1}{2}(b+c)$

$12{,}3617268 = \log\cot\frac{1}{2}(b-c)$ add.

$7{,}7929432 =$ def. Erg. $\log\tang\frac{1}{2}a$ add.

$12{,}2070602 = \log\cot\tau$

$12{,}2038298 = \log\cot 0^\circ\,21'\,30''$
$= \log\cot 1290''$

32304 dieser Unterschied subtrahirt von:

$3{,}1105897 = \log$. $1290''$ giebt

$6{,}1073593 = \log$. $1280{,}44''$ und

$1280{,}44'' =$

$\tau = 0^\circ\,21'\,20{,}44''$

$\frac{1}{2}(b-c) = 0^\circ\,14'\,56{,}8''$

$12{,}3650324 = \log\cot 0^\circ\,14'\,50''$
$= \log\cot 890''$

$53056 = (\log 896{,}8 - \log 890)$ sbt.

$12{,}3617268 = \log\cot\frac{1}{2}(b-c)$

$\frac{1}{2}a = 89^\circ\,38'\,39{,}55''$

$12{,}2038298 = \log\tang 89^\circ\,38'\,30''$
$= \log\cot 1290''$

$32270 = (\log 1290 - \log 1280{,}45)$ add.

$12{,}2070568 = \log\tang\frac{1}{2}a$

weil $(b+c) < 180^\circ$, so nimmt man nun $n = \frac{1}{2}a - \tau$, nehmlich

$\frac{1}{2}a = 89^\circ\,38'\,39{,}55''$

$\tau = 0^\circ\,21'\,20{,}44''$ subtr.

$n = 89^\circ\,17'\,19{,}11''$

$8{,}0955505 = \log\cot 89^\circ\,17'\,10'' = \log\tang 2470''$

$15439 = (\log 2570 - \log 2560{,}88)$ subtr.

$8{,}0939866 = \log\cot n$

$1{,}8790535 = \log\cot b - \log\sin\tau$ add.

$9{,}9730201 = \log\cos C$

$9{,}9729858 = \log\cos 19^\circ\,60'$ subtr.

$343 : (\text{diff. } 1'' = 3{,}66) = 44{,}8''$ subtr.

$C = 19^\circ\,59'\,15{,}8''$ bleibt kleiner als 90°, weil

$11{,}8798311 = \log\cot 0^\circ\,45'\,20'' = \log\cot 2720''$

$7976 = (\log 2725 - \log 2720)$ subtr.

$1{,}8790355 = \log\cot b - \log\sin\tau$

b und c, so wie b und τ, gleichartig sind.

Um nun auch die nächst größere Seite B zu haben, nimmt man, vermöge der vorletzten unter den für die Entwickelung von B ausgesetzten Formeln, die Summe von $\frac{1}{2}a$ und der auf gleiche Weise, wie vorhin gefundenen Hülfsgröße τ, und erhält das dortige m, nehmlich:

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}a = & 89^\circ\,38'\,39{,}5\,|\,5'' \\ \tau = & 0^\circ\,21'\,20{,}4\,|\,4'' \text{ add.} \\ \hline m = & 90^\circ\ 0'\ 0{,}0'' \end{array}$$

folglich ist, wegen $m = 90^\circ$ auch $B = 90^\circ$; woraus man sieht, daß man es mit einem Quadrantendreieck zu thun gehabt habe und in der That sind die hier gegebenen Winkel die nehmlichen, welche in den Aufgaben: II, 2 und 3 als die Winkel eines Quadrantendreiecks theils gegeben, theils gesucht sind, während die oben entwickelte Seite C von der dort gegebenen $b = 19^\circ\,59'\,15''$ nur um $\frac{2}{10}$ Secunden verschieden ist, welches bei einer so stark zusammengesetzten Rechnung und bei so stumpfen und spitzen Winkeln, wie die hier gegebenen, eine größere Uebereinstimmung ist, als man erwarten konnte.

12. Noch als ein Beispiel der Entwickelung einer Seite aus den gegebenen Winkeln nach den analytischen Formeln, welche das Quäsit in dem Sinus oder Cosinus seiner Hälfte geben, diene die folgende Aufgabe:

Die drei Winkel sind: $0^\circ\,0'\,15''$; $56^\circ\,15'\,2{,}9''$; $125^\circ\,44'\,55{,}7''$; es soll aus ihnen die kleinste Seite des Dreiecks nach einer Formel der 5ten Hauptabtheilung der 8ten Tabelle bestimmt werden.

Auflös. Weil die gesuchte Seite dort mit A bezeichnet ist, so heißt auch der ihr gegenüberstehende Winkel, nehmlich der kleinste unter den hier gegebenen, a; die beiden andern heißen nach beliebiger Wahl b und c, und weil sich zum Voraus übersehen läßt, daß die Seite A sehr klein ausfallen werde, so entwickelt man sie nach der 2ten der dortigen Formeln aus dem Sinus ihrer Hälfte. Man hat zuvörderst:

a = 0° 0′ 15″
b = 56° 15′ 2,9″
c = 123° 44′ 55,7″
a+b+c = 180° 0′ 13,6″
p = ½(a+b+c) = 90° 0′ 6,8″
p − a = 89° 59′ 51,8″

180°
c = 123° 44′ 55,7″
Suppl. von c = 56° 15′ 4,3″
0,9198464 − 1 = log sin 56° 15′
60 = (diff. 1″ = 14,06) × 4,3 add.
0,9198524 − 1 = log sin c

log cos p = log sin 0° 0′ 6,8″ = 0,5180838 − 5 nach pag. 191 der Tafeln. ff.
log cos(p − a) = log sin 0° 0′ 8,2″ = 0,5993888 − 5 ad. 0,9198464 − 1 = log sin 56° 15′
def. Erg. log sin b = 10,0801495
def. Erg. log sin c = 10,0801476
log(sin ½A)² = 1,2777697 − 10
0,6388848 − 5 = log sin ½A
0,6349649 − 5 = log sin 0° 0′ 8,9″ (pag. 190 d. Vegaschen Taf.)
41 = (diff. 1″ = 14,06) × 2,9 add.
0,9198565 − 1 = log sin B″
39199
log. 8,9 = 0,9493900 add. giebt:
0,9533099 = log . 8,9|806....

also: ½A = 0° 0′ 9″ und mithin
A = 0° 0′ 18″.

13. Von zwei Seiten eines sphär. Dreiecks ist die eine = 16°, die andere = 160° und der der letzteren gegenüberstehende Winkel beträgt gleichfalls 16°; wie groß ist der der andern Seite gegenüberstehende Winkel?

Auflös. Nach Anleitung der Formel Nr. 1. der 3ten Abth. der 6ten Tab. oder auch der 5ten Hauptabtheil. d. 8ten Tab. heißt die gegebene Seite und ihr Gegenwinkel: B und b, die andere Seite heißt A, daß also A = 16°, B = 160° und b = 16° ist; und man findet den Winkel a folgendermaßen:

9,4403381 = log sin A
9,4403381 = log sin b, add.
0,4659483 = def. Erg. log sin B = def. Erg. log sin 20°. add.
9,3466245 = log sin a
9,3465794 = log sin 12° 50′ subtr.
451 : (diff. 1″ = 9,37) = 4,9″ add.
a = 12° 50′ 4,9″ bleibt spitz,

weil b < 90° und B > A ist, und die Aufgabe ist völlig bestimmt.

14. Aus den obigen Datis den von den gegebenen Seiten eingeschlossenen Winkel c zu finden.

Auflös. I. Nach der Formel Nr. 2. der 3ten Abtheilung der 6ten Tabelle.

9,4246147 = log cos 74° 35′ 19,9828416 = log cos A + log sin tot.
1780 = (diff. 1″ = 76,40) × 23,3 subt. 10,5425036 = log cot b subtr.

9,4244367 = log cos m 9,4403380 = log cot m
10,4389341 = log cot B = log cot 20° ad. 9,4400363 = log cot 74° 36′ subtr.
9,4574964 = def. Erg. log cot A. add. 3017 : (diff. 1″ = 82,21) = 36,7″ subt.
9,3208672 = log cos n m = 74° 35′ 36,7″
9,3208400 = log cos 77° 55′ bleibt kleiner als 90°, weil A und
272 : (diff. 1″ = 98,43) = 2,8″ subt. b gleichartig sind.
77° 54′ 57,2″ das Supplement hievon giebt:
n = 102° 5′ 2,8″ ist größer als 90°, weil B ungleichart. b.
m = 74° 35′ 23,3″ wird addirt, weil n > m oder weil a ungleich-
c = 176° 40′ 26,1″ art. b ist.

Auflös. II. Eben das Quäsit nach der 2ten Formel der 5ten Hauptabtheil. in Tab. 8.

0,4241563 — 1 = log sin 15° 24′ 0,9828416 — 1 = log cos A
2804 = (diff. 1″ = 76,40) × 36,7 ad. 0,4574964 — 1 = log tang b add.

0,4244367 — 1 = log sin φ 0,4403380 — 1 = log tang φ
0,4574964 — 1 = log tang A add. 0,4400363 — 1 = log tang 15° 24′ subt.
0,4389341 = log cot B = log cot 20° ad. 3017 : (diff. 1″ = 82,21) = 36,7″ ad.
0,3208672 — 1 = log sin σ φ = 15° 24′ 36,7″
0,3208400 — 1 = log sin 12° 5′ subt. bleibt kleiner als 90°, weil jeder
272 : (diff. 1″ = 98,30) = 2,8″ ad. Factor und daher auch tang φ po-
σ = 12° 5′ 2,8″; sitiv ist.

hievon gelten aber, weil sin σ negativ ist, nur die beiden Supplementarwerthe über 180°, nehmlich:

1) $\sigma + 180° = 192° 5' 2{,}8''$ und hievon abgezogen:

$\varphi = 15° 24' 36{,}7''$

giebt: $c = 176° 40' 26{,}1''$

2) $360° - \sigma = 347° 54' 58{,}3''$ hievon abgezogen

$\varphi = 15° 24' 36{,}7''$

giebt: $c = 332° 31' 21{,}6''$, welcher Werth, weil er größer als 180° ist, hier unbrauchbar bleibt; es gilt allein der obige und die Aufgabe zeigt sich hier wie dort völlig bestimmt und wird durch dasselbe Resultat beantwortet.

Auflöſ. III. Die Constructionsformeln, welche das Quäsit in einem ungetheilten Ausdrucke geben, sind zwar für die Praxis der numerischen Construction aus bekannten Gründen nicht zu empfehlen, jedoch wird es zur Uebung dienlich und besonders hier, in Hinsicht auf die merkwürdige Consequenz des Wurzelzeichens, auch interessant sein, den obigen Werth aus der 1sten Constructionsformel für c, welche ihn durch die Tangente seiner Hälfte sich stellen läßt, zu entwickeln. Man muß hiebei die logarithmischen Functionen, oder deren logarithmische Producte und Potenzen, wie die gegenseitigen in der Formel vorgeschriebenen Bedingungen es erfordern, in die natürlichen übertragen, um sie addiren oder subtrahiren zu können, und für die Summen oder Differenzen aufs neue ihre Logarithmen, substituiren um mit diesen wiederum die Producte, Quotienten, Wurzelgrößen u. s. f. bequemer bilden zu können, bis man durch dieses wechselseitige Uebertragen und Aggregiren, welches die ganze Construction so weitläufig und unpraktisch macht, zum logarithmischen Finalausdrucke, hier dem $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} c$, gelangt. Die Rechnung, wie sie Schritt vor Schritt zu führen ist, wird sich durch die nachstehende Darstellung leicht verfolgen und übersehen lassen; das Einzelne derselben, wenn zu den Logarithmen die natürlichen Zahlen und umgekehrt zu diesen jene gesucht sind, ist fortgeblieben, weil das Aufschreiben der Proportionaltheile zu viel Raum wegnimmt, die Uebersicht und Anordnung erschwert und weil ohnehin der Schüler am zweckmäßigsten nur mit der Feder in der Hand der Rechnung folgt.

log

$\log \cos b = 0{,}9828416 - 1$
$\log \sin B = 0{,}5340517 - 1$

$\log(\cos b . \sin B) = 0{,}5168933 - 1$
$\cos b . \sin B = 0{,}3287709$

$\log \sin B = 0{,}5340517 - 1$
$\log(\sin B^2) = 0{,}0681034 - 1$
$\sin B^2 = 0{,}1169778$
$\sin b^2 . \sin A^2 = 0{,}0057723$

$\sin B^2 - \sin b^2 . \sin A^2 = 0{,}1112055$
$\log(\sin B^2 - \sin b^2 . \sin A^2) = 1{,}0461264 - 2$
$\log \sqrt{(\sin B^2 - \sin b^2 . \sin A^2)} = 0{,}5230632 - 1$
$\sqrt{(\sin B^2 - \sin b^2 . \sin A^2)} = 0{,}3334749$

$\log \sin b = 0{,}4403381 - 1$
$\log(\sin b^2) = 0{,}8806762 - 2$
$\log(\sin A^2) = 0{,}8806762 - 2$
$= (\log \sin b^2)$

$\log(\sin b^2 . \sin A^2 = 0{,}7613524 - 3$
$\sin b^2 . \sin A^2 = 0{,}0057723$

diese Größe muß also zu der obigen: $\cos b . \sin B$ einmal addirt und einmal davon subtrahirt werden; aber die Subtraction giebt hier einen negativen Werth für den Zähler, der nur dann sich in einen positiven verwandeln kann, wenn auch der Nenner negativ wird, welches hier nicht statt findet, da nicht nur $\sin b =$ sondern auch, weil $(A + B) < 180°$ bleibt, $\sin(A + B)$ positiv ist und die Construction offenbart daher schon auf diesem Puncte, daß die Aufgabe bestimmt sei, indem man es nur mit dem einen Werthe des Zählers, welcher durch die Addition entsteht, zu thun hat. Es ist nun also:

$\cos b . \sin B = 0{,}3287709$
die gefund. Wurzelgröße $= 0{,}3334749$ add.

der Zähler $= 0{,}6622458$ und
log. des Zählers $= 0{,}8210192 - 1$.

Hierauf sucht man nun auch den Logarithmus des Nenners, nehmlich:

$\log \sin(A + B) = \log \sin(16° + 160°) =$
$\log \sin 176° = \log \sin 4° = 0{,}8436845 - 2$
$\log \sin b = 0{,}4403381 - 1$ add.

$\log(\sin b . \sin(A + B)) = \log$ des Nenners $= 0{,}2839226 - 2$.

Demnach hat man:

log. des Zählers = 0,8210192 — 2
Log. des Nenners = 0,2839226 — 2 subtr.
1,5370966 = log tang $\frac{1}{2}$c
1,5378762 = log tang 88° 20′ 10″ subtr.
2204 : (diff. 1″ = 726,0) = 3,0 | 3 add.
$\frac{1}{2}$c = 88° 20′ 13,0 | 3″
mithin: c = 176° 40′ 26,1″
völlig so, wie durch die 1ste und 2te Auflösung.

15. Zwei Winkel eines sphär. Dreiecks sind gegeben: der eine a = 85° 30′; der andere b = 45° 50′ und die dem letzteren gegenüberstehende Seite B = 15°; man soll auch die dem ersteren gegenüberliegende Seite A bestimmen.

Auflös. Nach der 1sten Formel der 6ten Hauptabtheil. in der 8ten Tabelle.

0,9865911 — 1 = log sin a
0,1129962 — 1 = log sin B add.
0,4418940 = dek. Erg. log sin b add.
0,5554813 — 1 = log sin A
0,5556433 — 1 = log sin 21° 4′ subt.
3014 : (diff. 1″ = 54,64) = 55,2″ add.
A = 21° 4′ 55,2″ und auch
A = 158° 55′ 4,8″ dem Supplement des obigen Werths.

16. Aus eben den Elementen: a = 85° 30′; b = 45° 50′; B = 15° die zwischen den gegebenen Winkeln liegende Seite C zu finden.

Auflös. I. Nach der 2ten Formel in der 6ten Hauptabth. der Tab. 8.

0,3230526 — 2 = log cos 88° 47′ 40″ = log sin 4340″
4305 = (log 4340 — log 4336,7) subt.
0,3260021 — 2 = log cos φ
1,1040158 = log tang a add.
0,9873651 — 1 = log cot b add.
0,4139830 — 1 = log cos σ
0,4198181 — 1 = log cos 74° 58′ subt.
449 : (diff. 1″ = 78,36) = 5,7″ subt.
σ = 74° 57′ 54,3″ ist

0,8946433 — 2 = log cos a
0,2805325 — 1 = log tang B. add.
0,5269958 — 2 = log cot φ
0,3221166 — 2 = log cot 88° 47′ 50″ = log tang 4330″
5692
3,6364879 = log 4330 add.
3,6370571 = log 4335,6 | 79
4,6 | 79 abgs.
φ = 88° 47′ 44,3″ bleibt

an und für sich positiv, folglich sind hier nur zulässig die beiden Supplementarwerthe zunächst unter und über 280″, nehmlich: kleiner als 90°, weil jeder Factor der cot φ positiv ist.

1) $180° - \sigma = 105°\ 2'\ 6{,}7''$ davon abgezogen:
$\varphi = 88°\ 47'\ 44{,}3''$ giebt:

$C = 16°\ 14'\ 21{,}4''$

2) $180° + \sigma = 254°\ 57'\ 54{,}3''$ davon abgezogen:
$\varphi = 88°\ 47'\ 44{,}3''$ giebt:

$C = 166°\ 10'\ 10''$, welche Größe, da sie kleiner als 180° ist, gleichfalls ein Werth des Quäsits ist; die Aufgabe ist mithin zweideutig, wie sich aus §. 39,4 Nr. 7. (Sphgeom.) zum voraus übersehen ließ.

Auflös. II. Zum Schlusse dieser Uebungen werde dasselbe Quäsit noch nach der 1sten Constructionsformel für C in der 6ten Hauptabtheilung der 8ten Tab. aus der Tangente seiner Hälfte entwickelt; wobei dieselbe Darstellungsweise wie in der 3ten Auflösung der Aufgabe Nr. 14. befolgt wird.

$\log \sin b = 0{,}8557106 - 1$
$\log \cos B = 0{,}9849438 - 1$
$\log(\sin b \cdot \cos B) = 0{,}8406544 - 1$
$\sin b \cdot \cos B = 0{,}6928742$

$\log \sin b = 0{,}8557106 - 1$
$\log(\sin b^2) = 0{,}7114212 - 1$
$\sin b^2 = 0{,}5145425$

$\log \sin a = 0{,}9986591 - 1$
$\log(\sin a^2) = 0{,}9973182 - 1$
$\log \sin B = 0{,}4129962 - 1$
$\log(\sin B^2) = 0{,}8259924 - 2$

$\sin a^2 \cdot \sin B^2 = 0{,}0665749$

$\sin b^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2 = 0{,}4479676$
$\log(\sin b^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2) = 1{,}6512465 - 2$
$\log \sqrt{(\sin b^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2)} = 0{,}8256232 - 1$

$\log(\sin a^2 \cdot \sin B^2) = 0{,}8233106 - 2$
$\sin a^2 \cdot \sin B^2 = 0{,}0665749$

$\sqrt{(\sin b^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2)} = 0{,}6693038$ diese Größe zu der eben gefundenen: $\sin b \cdot \cos B$ addirt und davon subtrahirt, giebt zwei positive Werthe des Zählers, die also, weil der Nenner gleichfalls positiv bleibt, auf eben so viel Werthe unter 180° für das Quäsit der Aufgabe, die hiemit also als eine zweideutige erkannt wird, führen müssen.

$\sin b \cdot \cos B = 0{,}6928742$ die Wurzelgröße $= 0{,}6693038$ subt.

1ster Werth des Zählers $= 1{,}3621780$
log des 1st. Werths d. Zählers $= 0{,}1342340$

$\sin b \cdot \cos B = 0{,}6928742$ die Wurzelgröße $= 0{,}6693038$ sbt.

2ter Werth des Zählers $= 0{,}0235704$
log d. 2t. Werths d. Zähl. $= 0{,}3725670 - 2$

Hiernächst wird der Logarithmus des Nenners gesucht:

$\log \sin B = 0{,}4129962 - 2$

$\log \sin 39^\circ 40' = \log \sin (a - b) = 0{,}8050385 - 1$

$\log (\sin B . \sin (a - b)) = \log$ des Nenners $= 0{,}2180347 - 1.$

Demnach hat man:

1) log d. 1sten Zählerwerthes $= 0{,}1342340$

log des Nenners $= 0{,}2180347 - 1$ subt.

$0{,}9161993 = \log \text{tang } \frac{1}{2} C$

$0{,}9161089 = \log \text{tang } 83^\circ 5'$ subt.

904 : (diff. 1″ = 176,36) = 5,1|2″ add.

$\frac{1}{2} C = 83^\circ\ 5'\ 5{,}1|2''$

mithin: $C = 166^\circ 10' 10{,}2''$

2) log d. 2ten Zählerwerthes $= 0{,}3723670 - 2$

log des Nenners $= 0{,}2180347 - 1$ subt.

$0{,}1543323 - 1 = \log \text{tang } \frac{1}{2} C$

$0{,}1541739 - 1 = \log \text{tang } 8^\circ 7'$ subt.

1584 : (diff. 1″ = 150,51) = 10,5|2 add.

$\frac{1}{2} C = 8^\circ\ 7'\ 10{,}5|2''$

folglich: $C = 16^\circ 14' 21''$

beide Werthe nur um wenige Secundenzehntheilchen von den in der 1sten Auflösung gefundenen abweichend.

Tafel I.

Zur Berechnung sphärischer Dreiecke, wenn unter den Datis ein rechter Winkel sich befindet und die demselben gegenüberstehende Seite mit H, die ihm anliegenden Seiten mit B und P und die den letzteren gegenüberstehenden Winkel respective mit b und p bezeichnet werden;

oder auch gültig, wenn

unter den Datis ein Quadrant ist und der demselben gegenüberstehende Winkel mit H, die beiden ihm anliegenden Winkel mit B und P, die den letzteren gegenüberstehenden Seiten respective mit b und p bezeichnet werden und wenn überdies überall ungleichartig statt gleichartig und gleichartig statt ungleichartig gesetzt wird.

Der sin tot ist überall mit r bezeichnet.

$B \lesseqgtr 90°$ heißt: B ist entweder kleiner oder größer als 90° u. s. f.

	Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte.	Das Gesuchte ist kleiner als 90° wenn:	größer als 90° wenn:	Bestimmung des Gesuchten, mehr als ein Element = 90
1	P und B	p	$\tang p = r \cdot \tang P : \sin B$ oder: $\cot p = \sin B \cdot \cot P : r = r \cdot \sin B : \tang P$	$P < 90°$	$P > 90°$	$p = 90°$ wenn $P = B = 90°$. $p = 90°$ wenn $P = 90°$, $B \lessgtr 9$ $p = P$ wenn $P \lessgtr 90°$, $B = 90°$
2	P und B	b	$\tang b = r \cdot \tang B : \sin P$ oder: $\cot b = \sin P \cdot \cot B : r = r \cdot \sin P : \tang B$	$B < 90°$	$B > 90°$	$b = 90°$ wenn $P = B = 90°$. $b = B$ wenn $P = 90°$, $B \lessgtr 9$ $b = 90°$ wenn $P \lessgtr 90°$, $B = 9$
3	P und B	H	$\cos H = \cos P \cdot \cos B : r$	P und B gleichartig	P und B ungleichartig	$H = 90°$ wenn $P = B = 90°$. $H = 90°$ wenn $P = 90°$, $B \lessgtr 9$ $H = 90°$ wenn $P \lessgtr 90°$, $B =$
4	p und B	P	$\tang P = \sin B \cdot \tang p : r = r \cdot \sin B : \cot p$ oder: $\cot P = r \cdot \cot p : \sin B$	$p < 90°$	$p > 90°$	$P = 90°$ wenn $p = B = 90°$. $P = 90°$ wenn $p = 90°$, $B \lessgtr 9$ $P = p$ wenn $p \lessgtr 90°$, $B = 90°$
5	p und B	b	$\cos b = \sin p \cdot \cos B : r$	$B < 90°$	$B > 90°$	$b = 90°$ wenn $p = B = 90°$. $b = B$ wenn $p = 90°$, $B \lessgtr 90°$ $b = 90°$ wenn $p \lessgtr 90°$, $B = 9$
6	p und B	H	$\cot H = \cos p \cdot \cot B : r = r \cdot \cos p : \tang B$ oder: $\tang H = r \cdot \tang B : \cos p$	p und B gleichartig.	p und B ungleichartig	$H = 90°$ wenn $p = B = 90°$. $H = 90°$ wenn $p = 90°$, $B \lessgtr$ $H = 90°$ wenn $p \lessgtr 90°$, $B =$
7	b und P	B	$\tang B = \sin P \cdot \tang b : r = r \cdot \sin P : \cot b$ oder: $\cot B = r \cdot \cot b : \sin P$	$b < 90°$	$b > 90°$	$B = 90°$ wenn $b = P = 90°$. $B = 90°$ wenn $b = 90°$, $P \lessgtr 9$ $B = b$ wenn $b \lessgtr 90°$, $P = 90°$
8	b und P	p	$\cos p = \sin b \cdot \cos P : r$	$P < 90°$	$P > 90°$	$p = 90°$ wenn $b = P = 90°$. $p = P$ wenn $b = 90°$, $P \lessgtr 90°$ $p = 90°$ wenn $b \lessgtr 90°$, $P = 9$
9	b und P	H	$\cot H = \cos b \cdot \cot P : r = r \cdot \cos b : \tang P$ oder: $\tang H = r \cdot \tang P : \cos b$	b und P gleichartig	b und P ungleichartig	$H = 90°$ wenn $b = P = 90°$. $H = 90°$ wenn $b = 90°$, $P \lessgtr$ $H = 90°$ wenn $b \lessgtr 90°$, $P =$
10	p und b	P	$\cos P = r \cdot \cos p : \sin b$	$p < 90°$	$p > 90°$	$P = 90°$ wenn $p = b = 90°$. $P = 90°$ wenn $p = 90°$, $b \lessgtr 9$ $P = p$ wenn $p \lessgtr 90°$, $b = 90°$
11	p und b	B	$\cos B = r \cdot \cos b : \sin p$	$b < 90°$	$b > 90°$	$B = 90°$ wenn $p = b = 90°$. $B = b$ wenn $p = 90°$, $b \lessgtr 90°$ $B = 90°$ wenn $p \lessgtr 90°$, $b = 9$
12	p und b	H	$\cos H = \cot p \cdot \cot b : r = r \cdot \cot p : \tang b = r \cdot \cot b : \tang p$	p und b gleichartig	p und b ungleichartig	$H = 90°$ wenn $p = b = 90°$. $H = 90°$ wenn $p = 90°$, $b \lessgtr$ $H = 90°$ wenn $p \lessgtr 90°$, $b =$
13	P und H	p	$\sin p = r \cdot \sin P : \sin H$	$P < 90°$	$P > 90°$	$p = 90°$ wenn $P = H = 90°$. p unmöglich wenn $P = 90°$, H $p = P$ wenn $P \lessgtr 90°$, $H = 90°$
14	P und H	B	$\cos B = r \cdot \cos H : \cos P$	P und H gleichartig	P und H ungleichartig	B unbestimmt wenn $P = H =$ B unmöglich wenn $P = 90°$, H $B = 90°$ wenn $P \lessgtr 90°$, $H =$
15	H und P	b	$\cos b = r \cdot \cot H : \cot P = r \cdot \tang P : \tang H = \cot H \cdot \tang P : r$	P und H gleichartig	P und H ungleichartig	b unbestimmt wenn $P = H =$ b unmöglich wenn $P = 90°$, H $b = 90°$ wenn $P \lessgtr 90°$, $H =$

ge-n.	Ge-ſucht.	Gleichungen für das Geſuchte.	Das Geſuchte iſt kleiner als 90° wenn:	Das Geſuchte iſt größer als 90° wenn:	Beſtimmung des Geſuchten, wenn mehr als ein Element = 90° iſt.
	b	$\sin b = r \cdot \sin B : \sin H$	$B < 90°$	$B > 90°$	$b = 90°$ wenn $B = H = 90°$. b unmöglich wenn $B = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $b = B$ wenn $B \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	P	$\cos P = r \cdot \cos H : \cos B$	B und H gleichartig	B und H ungleichartig	P unbeſtimmt wenn $B = H = 90°$. P unmöglich wenn $B = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $P = 90°$ wenn $B \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	p	$\cos p = r \cdot \cot H : \cot B = r \cdot \tang B : \tang H = \cot H \cdot \tang B : r$	B und H gleichartig	B und H ungleichartig	p unbeſtimmt wenn $B = H = 90°$. p unmöglich wenn $B = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $p = 90°$ wenn $B \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	P	$\sin P = \sin H \cdot \sin p : r$	$p < 90°$	$p > 90°$	$P = 90°$ wenn $p = H = 90°$. P unmöglich wenn $p = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $P = p$ wenn $p \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	b	$\cot b = r \cdot \cos H : \cot p = \cos H \cdot \tang p : r$ oder: $\tang b = r \cdot \cot p : \cos H$	p und H gleichartig	p und H ungleichartig	b unbeſtimmt wenn $p = H = 90°$. b unmöglich wenn $p = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $b = 90°$ wenn $p \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	B	$\cot B = r \cdot \cot H : \cos p$ oder: $\tang B = \cos p \cdot \tang H : r = r \cdot \cos p : \cot H$	p und H gleichartig	p und H ungleichartig	B unbeſtimmt wenn $p = H = 90°$. B unmöglich wenn $p = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $B = 90°$ wenn $p \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	B	$\sin B = \sin H \cdot \sin b : r$	$b < 90°$	$b > 90°$	$B = 90°$ wenn $b = H = 90°$. B unmöglich wenn $b = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $B = b$ wenn $b \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	p	$\cot p = r \cdot \cos H : \cot b = \cos H \cdot \tang b : r$ oder: $\tang p = r \cdot \cot b : \cos H$	b und H gleichartig	b und H ungleichartig	p unbeſtimmt wenn $b = H = 90°$. p unmöglich wenn $b = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $p = 90°$ wenn $b \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	P	$\cot P = r \cdot \cot H : \cos b$ oder: $\tang P = \cos b \cdot \tang H : r = r \cdot \cos b : \cot H$	b und H gleichartig	b und H ungleichartig	P unbeſtimmt wenn $b = H = 90°$. P unmöglich wenn $b = 90°$, $H \lesseqgtr 90°$. $P = 90°$ wenn $b \lesseqgtr 90°$, $H = 90°$.
	H	$\sin H = r \cdot \sin P : \sin p$	Von den Quäſiten: Nr. 25. 26. 27. iſt jedes $= 90°$, wenn $p = P$; außerdem aber hat es zwei zugleich gültige Supplementarwerthe unter und über 90°.		H $= 90°$ wenn $p = P = 90°$. H unmöglich wenn $p = 90°$, $P \lesseqgtr 90°$. H unmöglich wenn $p \lesseqgtr 90°$, $P = 90°$.
	B	$\sin B = r \cdot \tang P : \tang p = r \cdot \cot p : \cot P = \tang P \cdot \cot p : r$			B unbeſtimmt wenn $p = P = 90°$. B unmöglich wenn $p = 90°$, $P \lesseqgtr 90°$. B unmöglich wenn $p \lesseqgtr 90°$, $P = 90°$.
	b	$\sin b = r \cdot \cos p : \cos P$			b unbeſtimmt wenn $p = P = 90°$. b unmöglich wenn $p = 90°$, $P \lesseqgtr 90°$. b unmöglich wenn $p \lesseqgtr 90°$, $P = 90°$.
	H	$\sin H = r \cdot \sin B : \sin b$	Von den Quäſiten: Nr. 28. 29. 30. iſt jedes $= 90°$, wenn $b = B$; außerdem aber hat es zwei zugleich gültige Supplementarwerthe unter und über 90°.		H $= 90°$ wenn $b = B = 90°$. H unmöglich wenn $b = 90°$, $B \lesseqgtr 90°$. H unmöglich wenn $b \lesseqgtr 90°$, $B = 90°$.
	P	$\sin P = r \cdot \tang B : \tang b = r \cdot \cot b : \cot B = \tang B \cdot \cot b : r$			P unbeſtimmt wenn $b = B = 90°$. P unmöglich wenn $b = 90°$, $B \lesseqgtr 90°$. P unmöglich wenn $b \lesseqgtr 90°$, $B = 90°$.
	p	$\sin p = r \cdot \cos b : \cos B$			p unbeſtimmt wenn $b = B = 90°$. p unmöglich wenn $b = 90°$, $B \lesseqgtr 90°$. p unmöglich wenn $b \lesseqgtr 90°$, $B = 90°$.

Tafel II bis VII.

Zur Berechnung sphärischer Dreiecke, wenn unter den Datis kein rechter Winkel und kein Quadrant sich befindet. Die Seiten des Dreiecks heißen allemal: A, B, C und die der Reihe nach gegenüberstehenden Winkel: a, b, c. Hat das Dreieck zwei gleiche oder zwei supplementarische Seiten oder Winkel, so wird die Grundlinie durch C und der Winkel an der Spitze mithin durch c bezeichnet.

Der sin tot ist überall mit r bezeichnet, und

g. drückt die Gleichartigkeit
u. g. " " Ungleichartigkeit
+ " " positive Differenz

} der beiden Größen aus, zwischen welchen es steht.

Das Zeichen: $<$ oder $>$ hat die gewöhnliche Bedeutung, das Zeichen: $\lessgtr$ drückt gleichfalls die Ungleichheit der beiden Größen aus, zwischen denen es steht; aber zeigt zugleich an, daß es völlig gleichgültig ist, welche von diesen Größen die größere oder kleinere sei.

Tafel II. Die Data sind: zwei Seiten mit dem Zwischenwinkel.

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
I. Zwei gleiche Seiten $A=B$ mit dem Zwischenwinkel c	1. Die Winkel $a=b$ an der Basis	$\cot a = r \cdot \cos A : \cot \frac{1}{2} c = \cos A \cdot \tang \frac{1}{2} c : r$ oder: $\tang a = r \cdot \cot \frac{1}{2} c : \cos A$	$a < 90°$ wenn $A < 90°$ $a > 90°$ wenn $A > 90°$
	2. Die Basis C	$\sin \frac{1}{2} C = \sin A \cdot \sin \frac{1}{2} c : r$	$\frac{1}{2} C < 90°$
II. Zwei Supplementarseiten $A = 180° - B$ und $A > B$ mit dem Zwischenwinkel c	1. Die Winkel $a = 180° - b$ an d. Basis	$\cot b = \cos B \cdot \cot \frac{1}{2} c : r = r \cdot \cos B : \tang \frac{1}{2} c$ oder: $\tang b = r \cdot \tang \frac{1}{2} c : \cos B$	$b < 90°$
	2. Die Basis C	$\cos \frac{1}{2} C = \sin B \cdot \cos \frac{1}{2} c : r$	$\frac{1}{2} C < 90°$
III. Zwei ungleiche und unsupplementarische Seiten: $A > B$ mit dem Zwischenwinkel c	1. Der Winkel a	$\cot M = r \cdot \cot A : \cos c$ oder: $\tang M = \cos c \cdot \tang A : r = r \cdot \cos c : \cot A$ $N = B \div M$ $\tang a = \sin M \cdot \tang c : \sin N$ oder: $\cot a = \sin N \cdot \cot c : \sin M$	$M < 90°$ wenn c g. A $M > 90°$ wenn c u. g. A a g. c wenn $M < B$ a u. g. c wenn $M > B$ $a = 90°$ wenn $M = B$
	2. Der Winkel b	$\cot M = r \cdot \cot B : \cos c$ oder: $\tang M = \cos c \cdot \tang B : r = r \cdot \cos c : \cot B$ $N = A \div M$ $\tang b = \sin M \cdot \tang c : \sin N$ oder: $\cot b = \sin N \cdot \cot c : \sin M$	$M < 90°$ wenn c g. B $M > 90°$ wenn c u. g. B b g. c wenn $M < A$ b u. g. c wenn $M > A$ $b = 90°$ wenn $M = A$
	3. Die Seite C	M und N werden so wie in 1 entwickelt dann ist $\cos C = \cos N \cdot \cos A : \cos M$ oder: M und N werden so wie in 2 entwickelt: dann ist $\cos C = \cos N \cdot \cos B : \cos M$	$C < 90°$ wenn N g. c $C > 90°$ wenn N u. g. c $C = 90°$ wenn $N = 90°$ C g. c wenn $N = o$.

Tafel III. Die Data sind: zwei Winkel mit der Zwischenseite.

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
I. Zwei gleiche Winkel $a=b$ mit der Zwischenseite C	1. Die gleichen Seiten $A=B$	$\cot A = \cos a \cdot \cot \frac{1}{2}C : r = r \cdot \cos a : \operatorname{tang} \frac{1}{2}C$ oder: $\operatorname{tang} A = r \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}C : \cos a$	$A < 90°$ wenn $a < 90°$ $A > 90°$ wenn $a > 90°$
	2. D. Winkel c a. d. Spitze	$\cos \frac{1}{2}c = \sin a \cdot \cos \frac{1}{2}C : r$	$\frac{1}{2}c < 90°$
II. Zwei Supplementarwinkel $a = 180° - b$ und $a > b$ mit der Zwischenseite C	1. Die Seiten $A = 180° - B$	$\cot B = r \cdot \cos b : \cot \frac{1}{2}C = \cos b \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}C : r$ oder: $\operatorname{tang} B = r \cdot \cot \frac{1}{2}C : \cos b$	$B < 90°$
	2. D. Winkel c a. d. Spitze	$\sin \frac{1}{2}c = \sin b \cdot \sin \frac{1}{2}C : r$	$\frac{1}{2}c < 90°$
III. Zwei ungleiche und unsupplementarische Winkel: $a > b$ mit der Zwischenseite C	1. Die Seite A	$\cot m = r \cdot \cos C : \cot a = \cos C \cdot \operatorname{tang} a : r$ oder: $\operatorname{tang} m = r \cdot \cot a : \cos C$ $n = b \mp m$ $\cot A = \cos n \cdot \cot C : \cos m$ oder: $\operatorname{tang} A = \cos m \cdot \operatorname{tang} C : \cos n$	$m < 90°$ wenn C g. a $m > 90°$ wenn C u. g. a $A < 90°$ wenn n g. a $A > 90°$ wenn n u. g. a $A = 90°$ wenn $n = 90°$ A g. a wenn $n = o$
	2. Die Seite B	$\cot m = r \cdot \cos C : \cot b = \cos C \cdot \operatorname{tang} b : r$ oder: $\operatorname{tang} m = r \cdot \cot b : \cos C$ $n = a \mp m$ $\cot B = \cos n \cdot \cot C : \cos m$ oder: $\operatorname{tang} B = \cos m \cdot \operatorname{tang} C : \cos n$	$m < 90°$ wenn C g. b $m > 90°$ wenn C u. g. b $B < 90°$ wenn n g. b $B > 90°$ wenn n u. g. b $B = 90°$ wenn $n = 90°$ B g. b wenn $n = o$
	3. Der Winkel o	m und n werden so wie in 1 entwickelt dann ist $\cos c = \sin n \cdot \cos a : \sin m$ oder: m und n werden so wie in 2 entwickelt dann ist $\cos c = \sin n \cdot \cos b : \sin m$	c g. a wenn $m < b$ c u. g. a wenn $m > b$ $c = 90°$ wenn $m = b$ c g. b wenn $m < a$ c u. g. b wenn $m > a$ $c = 90°$ wenn $m = a$

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
I. Zwei gleiche Seiten A = B und die Basis C oder:	1. Wkl. a = b	$\cos a = r \cdot \cot A : \cot \frac{1}{2} C = r \cdot \tang \frac{1}{2} C : \tang A = \cot A \cdot \tang \frac{1}{2} C : r$	$a < 90°$ wenn $A < 90°$ $a > 90°$ wenn $A > 90°$
	2. Wkl. c	$\sin \frac{1}{2} c = r \cdot \sin \frac{1}{2} C : \sin A$	$\frac{1}{2} c < 90°$
drei gleiche Seiten: A = B = C.	Wkl. a = b = c	$\cos a = r \cdot \cot A : \cot \frac{1}{2} A = r \cdot \tang \frac{1}{2} A : \tang A = \cot A \cdot \tang \frac{1}{2} A : r$ oder: $\sin \frac{1}{2} a = r \cdot \sin \frac{1}{2} A : \sin A$	$a < 90°$ wenn $A < 90°$ $a > 90°$ wenn $A > 90°$. $\frac{1}{2} a < 90°$
II. Zwei Supplementarseiten $A = 180° - B$ und $A > B$ mit der Basis C.	1. Wkl. a = 180° − b	$\cos b = \cot \frac{1}{2} C \cdot \cot B : r = r \cdot \cot \frac{1}{2} C : \tang B = r \cdot \cot B : \tang \frac{1}{2} C$	$b < 90°$
	2. Wkl. c	$\cos \frac{1}{2} c = r \cdot \cos \frac{1}{2} C : \sin B$	$\frac{1}{2} c < 90°$
III. Drei ungleiche und unsupplementarische Seiten A > B, B > C.	1. Der Winkel a.	$\tang \tau = \tang \frac{1}{2}(A+B) \cdot \tang \frac{1}{2}(A-B) : \tang \frac{1}{2} C$ wenn $(A+B) < 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} C + \tau$ und $N = \frac{1}{2} C \div \tau$ wenn $(A+B) > 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} C \div \tau$ u. $N = \frac{1}{2} C + \tau$ $\cos a = r \cdot \cot B : \cot N = r \cdot \tang N : \tang B = \cot B \cdot \tang N : r$	$\tau < 90°$ wenn M und N beide über o, un 1) $M + N = C$, so ist $a < 90°$ weil $a > 90°$ wenn N 2) $M + N > C$, so ist $a > 90°$ wenn $N = o$, so ist $a = 90°$ wenn $M = o$, so ist a g. A
		oder: $\tang \tau = \tang \frac{1}{2}(A+C) \cdot \tang \frac{1}{2}(A-C) : \tang \frac{1}{2} B$ wenn $(A+C) < 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} B + \tau$ u. $N = \frac{1}{2} B \div \tau$ wenn $(A+C) > 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} B \div \tau$ u. $N = \frac{1}{2} B + \tau$ $\cos a = r \cdot \cot C : \cot N = r \cdot \tang N : \tang C = \cot C \cdot \tang N : r$	$\tau < 90°$ wenn M und N beide über o, un 1) $M + N = B$, so ist $a < 90°$ weil $a > 90°$ wenn N 2) $M + N > B$, so ist $a > 90°$ wenn $N = o$, so ist $a = 90°$ wenn $M = o$, so ist a g. A
		oder: $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$ und $\sin \frac{1}{2} a = r \cdot \sqrt{(\sin(P-B) \cdot \sin(P-C) : (\sin B \cdot \sin C))}$ $\cos \frac{1}{2} a = r \cdot \sqrt{(\sin P \cdot \sin(P-A) : (\sin B \cdot \sin C))}$	$\frac{1}{2} a < 90°$

die drei Seiten.

…geben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
…. Drei gleiche unsup-nentari- Seiten $> B$, $> C$.	2. Der Winkel b.	$\tang \tau = \tang \frac{1}{2}(A+B) . \tang \frac{1}{2}(A-B) : \tang \frac{1}{2} C$ wenn $(A+B) < 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} C + \tau$ u. $N = \frac{1}{2} C \div \tau$ wenn $(A+B) > 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} C \div \tau$ u. $M = \frac{1}{2} C + \tau$ $\cos b = r . \cot A : \cot M = r . \tang M : \tang A$ $= \cot A . \tang M : r$	$\tau < 90°$ wenn M und N beide über o, und 1) $M+N=C$, so ist $b < 90°$ wenn M g. A $b > 90°$ wenn M u. g. A 2) $M+N > C$, so ist $b < 90°$ wenn $M = o$, so ist $b = 90°$ wenn $N = o$, so ist b g. B
		oder: $\tang \tau = \tang \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(B-C) : \tang \frac{1}{2} A$ wenn $(B+C) < 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} A + \tau$ u. $N = \frac{1}{2} A \div \tau$ wenn $(B+C) > 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} A \div \tau$ u. $N = \frac{1}{2} A + \tau$ $\cos b = r . \cot C : \cot N = r . \tang N : \tang C$ $= \cot C . \tang N : r$	$\tau < 90°$ wenn M und N beide über o, und 1) $M+N=A$, so ist $b < 90°$ wenn N g. C $b > 90°$ wenn N u. g. C 2) $M+N > A$, so ist $b > 90°$ wenn $N = o$ so ist $b = 90°$ wenn $M = o$ so ist b g. B
		oder: $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$ und $\sin \frac{1}{2} b = r . \sqrt{(\sin P - A) . \sin P - C) : (\sin A . \sin C))}$ $\cos \frac{1}{2} b = r . \sqrt{(\sin P . \sin (P-B) : (\sin A . \sin C))}$	$\frac{1}{2} b < 90°$
	3. Der Winkel c.	$\tang \tau = \tang \frac{1}{2}(A+C) . \tang \frac{1}{2}(A-C) : \tang \frac{1}{2} B$ wenn $(A+C) < 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} B + \tau$ u. $N = \frac{1}{2} B \div \tau$ wenn $(A+C) > 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} B \div \tau$ u. $N = \frac{1}{2} B + \tau$ $\cos c = r . \cot A : \cot M = r . \tang M : \tang A$ $= \cot A . \tang M : r$	$\tau < 90°$ wenn M und N beide über o, und 1) $M+N=B$, so ist $c < 90°$ wenn M g. A $c > 90°$ wenn M u. g. A 2) $M+N > B$, so ist $c < 90°$ wenn $M = o$, so ist $c = 90°$ wenn $N = o$, so ist c g. C
		oder: $\tang \tau = \tang \frac{1}{2}(B+C) . \tang \frac{1}{2}(B-C) : \tang \frac{1}{2} A$ wenn $(B+C) < 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} A + \tau$ u. $N = \frac{1}{2} A \div \tau$ wenn $(B+C) > 180°$, so ist $M = \frac{1}{2} A \div \tau$ u. $N = \frac{1}{2} A + \tau$ $\cos c = r . \cot B : \cot M = r . \tang M : \tang B$ $= \cot B . \tang M : r$	$\tau < 90°$ wenn M und N beide über o, und 1) $M+N=A$, so ist $c < 90°$ wenn M g. B $c > 90°$ wenn M u. g. B 2) $M+N > A$, so ist $c < 90°$ wenn $M = o$, so ist $c = 90°$ wenn $N = o$, so ist c g. C.
		oder: $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$ und $\sin \frac{1}{2} c = r . \sqrt{(\sin (P-A) . \sin (P-B) : (\sin A . \sin B))}$ $\cos \frac{1}{2} c = r . \sqrt{(\sin P . \sin (P-C) : (\sin A . \sin B))}$	$\frac{1}{2} c < 90°$

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
I. Zwei gleiche Winkel a=b und der Winkel c an der Spitze oder: drei gleiche Winkel a=b=c.	1. Die Seiten A=B.	$\cos A = \cot a \cdot \cot \frac{1}{2} c : r = r \cdot \cot a : \tan g \frac{1}{2} c$ $= r \cdot \cot \frac{1}{2} c : \tan g a$	$A < 90°$ wenn $a < 90$ $A > 90°$ wenn $a > 90$
	2. Die Basis C.	$\cos \frac{1}{2} C = r \cdot \cos \frac{1}{2} c : \sin a$	$\frac{1}{2} C < 90°$
	D. Seite A des gleichseitigen Zecks.	$\cos A = \cot a \cdot \cot \frac{1}{2} a : r = r \cdot \cot a : \tan g \frac{1}{2} a$ $= r \cdot \cot \frac{1}{2} a : \tan g a$. oder: $\cos \frac{1}{2} A = r \cdot \cos \frac{1}{2} a : \sin a$	$A < 90°$ wenn $a < 90$ $A > 90°$ wenn $a > 90$ $\frac{1}{2} A < 90°$
II. Zwei Supplementarwinkel $a = 180° - b$ u. $a > b$ m. d Winkel c an der Spitze.	1. Die Seiten A = 180°. B	$\cos B = r \cdot \cot b : \cot \frac{1}{2} c = r \cdot \tan g \frac{1}{2} c : \tan g b$ $= \cot b \cdot \tan g \frac{1}{2} c : r$	$B < 90°$
	2. Die Basis C.	$\sin \frac{1}{2} C = r \cdot \sin \frac{1}{2} c : \sin b$	$\frac{1}{2} C < 90°$
III. Drei ungleiche und unsupplementarische Winkel $a > b$ $b > c$.	1. Die Seite A.	$\cot \tau = \cot \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cot \frac{1}{2}(a-b) : \tan g \frac{1}{2} c$ wenn $(a+b) < 180°$, so ist $m = \frac{1}{2} c + \tau$ wenn $(a+b) > 180°$, so ist $m = \frac{1}{2} c - \tau$ $\cos A = \cot b \cdot \cot m : r = r \cdot \cot b : \tan g m$ $= r \cdot \cot m : \tan g b$	$\tau < 90°$ wenn a g. b, so ist: $A < 90°$ weñ b g. m, $A > 90°$ wei wenn a u. g. b und $(a+b) < 18$ $A < 90°$ weñ b g. m, $A > 90°$ w. wenn a u. g. b und $(a+b) > 18$ $A < 90°$ weñ b u. g. m, $A > 90°$ $A = 90°$ wenn $m = 90$
		oder: $\cot \tau = \cot \frac{1}{2}(a+c) \cdot \cot \frac{1}{2}(a-c) : \tan g \frac{1}{2} b$ wenn $(a+c) < 180°$, so ist $m = \frac{1}{2} b + \tau$ wenn $(a+c) > 180°$, so ist $m = \frac{1}{2} b - \tau$ $\cos A = \cot c \cdot \cot m : r = r \cdot \cot c : \tan g m$ $= r \cdot \cot m : \tan g c$	$\tau < 90°$ wenn a g. c, so ist: $A < 90°$ weñ c g. m, $A > 90°$ w. wenn a u. g. c und $(a+c) < 18$ $A < 90°$ weñ c g. m, $A > 90°$ w. wenn a u. g. c und $(a+c) > 18$ $A < 90°$ weñ c u. g. m, $A > 90°$ $A = 90°$ wenn $m = 90$
		oder: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $\cos \frac{1}{2} A = r \cdot \sqrt{(\cos(p-b) \cdot \cos(p-c) : (\sin b \cdot \sin c))}$ $\sin \frac{1}{2} A = r \cdot \sqrt{(\cos p \cdot \cos(p-a) : (\sin b \cdot \sin c))}$.	$\frac{1}{2} A < 90°$

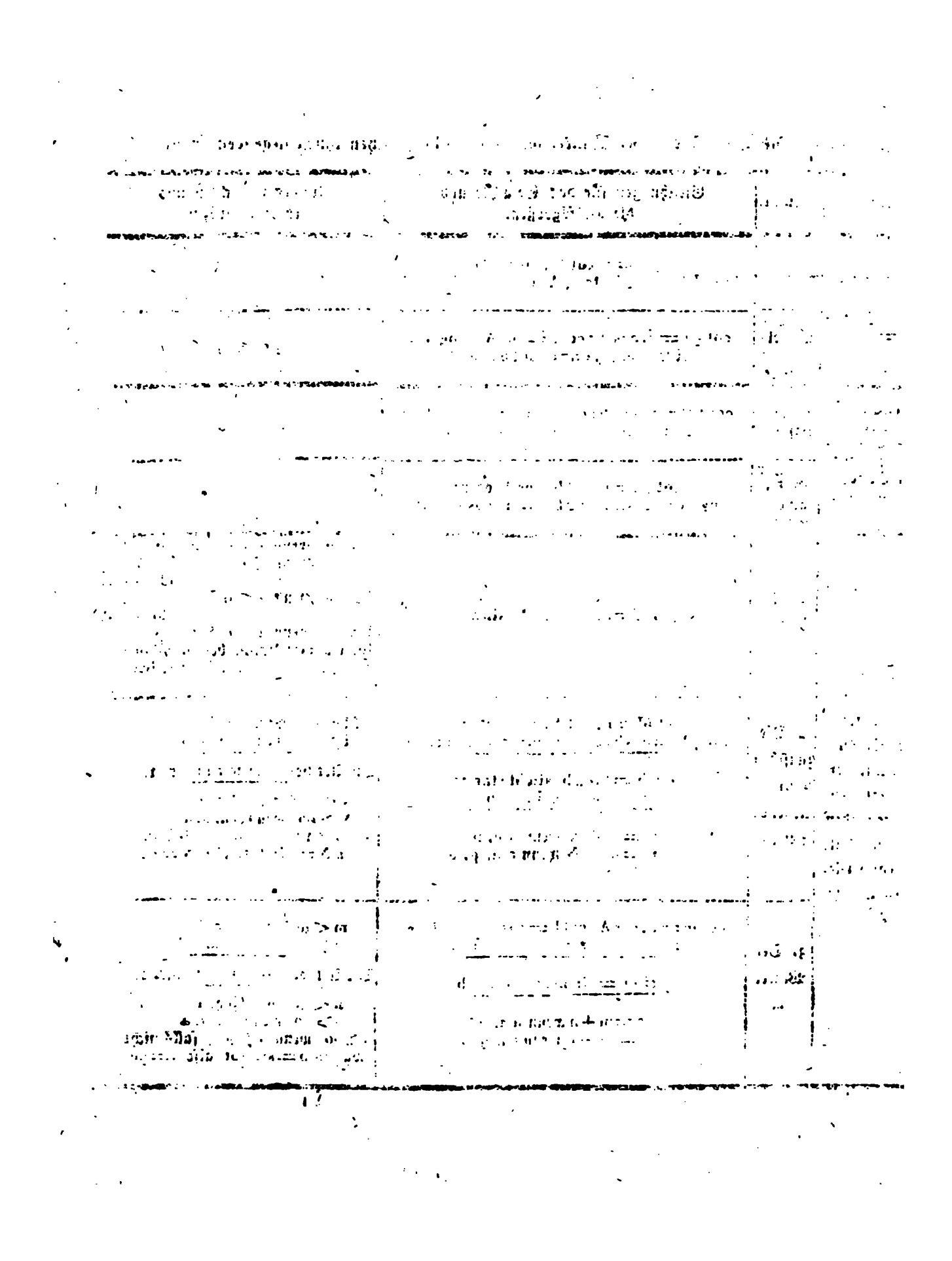
ben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
Drei eiche unsup- ntari- Winkel > b, > c.	2. Die Seite B.	$\cot\tau = \cot\frac{1}{2}(a+b).\cot\frac{1}{2}(a-b) : \tang\frac{1}{2}c$ wenn $(a+b) < 180°$, so ist $n = \frac{1}{2}c \div \tau$ wenn $(a+b) > 180°$, so ist $n = \frac{1}{2}c + \tau$ $\cos B = \cot a . \cot n : r = r . \cot a : \tang n = r . \cot n : \tang a$	$\tau < 90°$. wenn a g. b, so ist: B < 90° weñ a g. n, B > 90° w. a u. g. n wenn a u. g. b und (a+b) < 180°, so ist: B < 90° wenn a u. g. n, B > 90° w. a g. n wenn a u. g. b und (a+b) > 180°, so ist: B < 90° wenn a g. n, B > 90° w. a u. g. n B = 90° wenn n = 90°.
		oder: $\cot\tau = \cot\frac{1}{2}(b+c).\cot\frac{1}{2}(b-c) : \tang\frac{1}{2}a$ wenn $(b+c) < 180°$, so ist $m = \frac{1}{2}a + \tau$ wenn $(b+c) > 180°$, so ist $m = \frac{1}{2}a \div \tau$ $\cos B = \cot c . \cot m : r = r . \cot c : \tang m = r . \cot m : \tang c$	$\tau < 90°$. wenn b g. c, so ist: B < 90° weñ c g. m, B > 90° w. c u. g. m wenn b u. g. c und (b+c) < 180°, so ist: B < 90° weñ c g. m, B > 90° w. c u. g. m wenn b u. g. c u. (b+c) > 180°, so ist: B < 90° weñ c u. g. m, B > 90° w. c g. m B = 90° wenn m = 90°.
		oder: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $\cos\frac{1}{2}B = r.\sqrt{(\cos(p-a).\cos(p-c) : (\sin a . \sin c))}$ $\sin\frac{1}{2}B = r.\sqrt{(\cos p . \cos(p-b) : (\sin a . \sin c))}$	$\frac{1}{2}B < 90°$.
	3. Die Seite C.	$\cot\tau = \cot\frac{1}{2}(a+c).\cot\frac{1}{2}(a-c) : \tang\frac{1}{2}b$ wenn $(a+c) < 180°$, so ist $n = \frac{1}{2}b \div \tau$ wenn $(a+c) > 180°$, so ist $n = \frac{1}{2}b + \tau$ $\cos C = \cot a . \cot n : r = r . \cot a : \tang n = r . \cot n : \tang a$	$\tau < 90°$. wenn a g. c, so ist: C < 90° wenn a g. n, C > 90° w. a u. g. n wenn a u. g. c und (a+c) < 180°, so ist: C < 90° weñ a u. g. n, C > 90° w. a g. n wenn a u. g. c und (a+c) > 180°, so ist: C < 90° wenn a g. n, C > 90° w. a u. g. n C = 90° wenn n = 90°.
		oder: $\cot\tau = \cot\frac{1}{2}(b+c).\cot\frac{1}{2}(b-c) : \tang\frac{1}{2}a$ wenn $(b+c) < 180°$, so ist $n = \frac{1}{2}a \div \tau$ wenn $(b+c) > 180°$, so ist $n = \frac{1}{2}a + \tau$ $\cos C = \cot b . \cot n : r = r . \cot b : \tang n = r . \cot n : \tang b$	$\tau < 90°$. wenn b g. c, so ist: C < 90° weñ b g. n, C > 90° w. b u. g. n wenn b u. g. c und (b+c) < 180°, so ist: C < 90° weñ b u. g. n, C > 90° w. b g. n wenn b u. g. c und (b+c) > 180°, so ist: C < 90° weñ b g. n, C > 90° w. b u. g. n C = 90° wenn n = 90°.
		oder: $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und $\cos\frac{1}{2}C = r.\sqrt{(\cos(p-a).\cos(p-b) : (\sin a . \sin b))}$ $\sin\frac{1}{2}C = r.\sqrt{(\cos p . \cos(p-c) : (\sin a . \sin b))}$	$\frac{1}{2}C < 90°$.

Tafel VI. Die Data sind: zwei Seiten mit einem nicht zwischen ihnen liegenden W

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten u der Hülfsgrößen.
I. Zwei gleiche Seiten A=B mit dem Winkel b=a an der Grundlinie.	1. Der Winkel c an der Spitze.	$\cot\frac{1}{2}c = r.\cos A : \cot b = \cos A.\tang b : r$ oder: $\tang\frac{1}{2}c = r.\cot b : \cos A$	$\frac{1}{2}c < 90°$
	2. Die Basis C.	$\cot\frac{1}{2}C = r.\cot A : \cos b$ oder: $\tang\frac{1}{2}C = \cos b.\tang A : r = r.\cos b : \cot A$	$\frac{1}{2}C < 90°$
II. Zwei Supplementarseiten A=180° − B und A ≷ B mit d. Winkel b=180° − a an der Grundlinie.	1. Der Winkel c an der Spitze.	$\cot\frac{1}{2}c = r.\cot b : \cos A$ oder: $\tang\frac{1}{2}c = \cos A.\tang b : r = r.\cos A : \cot b$	$\frac{1}{2}c < 90°$
	2. Die Basis C.	$\cot\frac{1}{2}C = r.\cos b : \cot A = \cos b.\tang A : r$ oder: $\tang\frac{1}{2}C = r.\cot A : \cos b$	$\frac{1}{2}C < 90°$
III. Zwei ungleiche und unsupplementarische Seiten A ≷ B mit dem nicht zwischen ihnen liegenden, der einen Seite B gegenüberstehenden Winkel: b.	1. Der Winkel a.	$\sin a = \sin A.\sin b : \sin B$	a < 90° wenn b < 90°, B > a < 90° wenn b > 90°, A < a > 90° wenn b < 90°, A > a > 90° wenn b > 90°, B < Unter andern Umständen ist a wenn nicht sin a = sin tot, al ist.
	2. Der von A und B eingeschlossene Winkel c.	$\cot m = r.\cos A : \cot b = \cos A.\tang b : r$ oder: $\tang m = r.\cot b : \cos A$ $\cos n = \cos m.\cot B : \cot A = \cos m.\tang A : \tang B$ c = m + n wenn n > m oder wenn a g. b c = m − n wenn (m + n) > 180° od. wenn a u. g. b Unter andern Umständen wenn a ≷ 90° ist c = m + n und auch c = m − n, wenn nicht n = o, also c = m ist.	m < 90° wenn A g. b m > 90° wenn A u. g. n < 90° wenn B g. b n > 90° wenn B u. g. n = o wenn cos n = si Die Art von a wird so wie entschieden.
	3. Die Seite C.	$\cot M = r.\cot A : \cos b$ oder: $\tang M = \cos b.\tang A : r = r.\cos b : \cot A$ $\cos N = \cos M.\cos B : \cos A$ C = M + N wenn N > M oder wenn a g. b C = M − N wenn (M + N) > 180° od. wenn a u. g. b Unter andern Umständen wenn a ≷ 90° ist C = M + N und auch C = M − N, falls nicht N = o, also C = M ist.	M < 90° wenn A g. b M > 90° wenn A u. g. N < 90° wenn B g. b N > 90° wenn B u. g. N = o wenn cos N = s Die Art von a wird so wie entschieden.

afel VII. Die Data sind: zwei Winkel mit einer nicht zwischen ihnen liegenden Seite.

ben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.	Art des Gesuchten und der Hülfsgrößen.
gleiche b = a Seite = B.	1. Die Basis C.	$\cot\frac{1}{2}C = r.\cot A : \cos b$ oder: $\tang\frac{1}{2}C = \cos b . \tang A : r = r.\cos b : \cot A$	$\frac{1}{2}C < 90°$
	2. Der Winkel c an der Spitze	$\cot\frac{1}{2}c = r.\cos A : \cot b = \cos A . \tang b : r$ oder: $\tang\frac{1}{2}c = r.\cot b : \cos A$	$\frac{1}{2}c < 90°$
Supple- winkel 0° — a a mit Seite 0° — B.	1. Die Basis C.	$\cot\frac{1}{2}C = r.\cos b : \cot A = \cos b . \tang A : r$ oder: $\tang\frac{1}{2}C = r.\cot A : \cos b$	$\frac{1}{2}C < 90°$
	2. Der Winkel c an der Spitze.	$\cot\frac{1}{2}c = r.\cot b : \cos A$ oder: $\tang\frac{1}{2}c = \cos A . \tang b : r = r.\cos A : \cot b$	$\frac{1}{2}c < 90°$
wei un- und un- nentari- Winkel mit der wischen legenden, en Winkel nüberste- Seite: A.	1. Die Seite B.	$\sin B = \sin b . \sin A : \sin a$	B < 90° wenn A < 90°, a > b B < 90° wenn A > 90°, b < 90°, a < (180° — b) B > 90° wenn A < 90°, b > 90°, a > (180° — b) B > 90° wenn A > 90°, a < b Unter andern Umständen ist B ≶ 90° weil nicht sin B = sin tot, also B = 90° ist.
	2. Die zwischen b und a liegende Seite C.	$\cot M = r.\cot A : \cos b$ oder: $\tang M = \cos b . \tang A : r = r.\cos b : \cot A$ $\sin N = \tang b . \sin M : \tang a = \cot a . \sin M : \cot b$ C = M + N wenn a g. b C = M — N wenn a u. g. b	M < 90° wenn A g. b M > 90° wenn A u. g. b Die Art von B so wie in Nr. 1. N < 90° wenn B g. a N > 90° wenn B u. g. a N ≶ 90° wenn B ≶ 90°, falls nicht etwa sin N = sin tot, also N = 90°
	3. Der Winkel c.	$\cot m = r.\cos A : \cot b = \cos A . \tang b : r$ oder: $\tang m = r.\cot b : \cos A$ $\sin n = \sin m . \cos a : \cos b$ c = m + n wenn a g. b c = m — n wenn a u. g. b	m < 90° wenn A g. b m > 90° wenn A u. g. b Die Art von B so wie in Nr. 1. n < 90° wenn B g. a n > 90° wenn B u. g. a n ≶ 90° wenn B ≶ 90°, falls nicht etwa sin n = sin tot, also n = 90°.



Tafel VIII.

Enthaltend analytische Formeln zur trigonometrischen Construction vornehmlich solcher sphärischer Dreiecke, bei welchen unter den Datis kein rechter Winkel und kein Quadrant, wie auch keine gleichen und keine supplementarischen Seiten oder Winkel sich befinden, indem zwar unter diesen Umständen die competenten Formeln der gegenwärtigen Tafel gleichfalls das richtige Resultat, aber umständlicher, als die für diese Bedingungen besonders eingerichteten Vorschriften der vorhergehenden Tafeln I—VII. liefern.

Die Seiten des Dreiecks sind durch die Buchstaben: A, B, C und die ihnen entgegenstehenden Winkel in derselben Ordnung mit a, b, c bezeichnet.

Durchgehends ist der sin tot = 1 gesetzt.

Die Art der Quäsite wird durch das Vorzeichen entschieden und dieses

	von 0 zu 90°	von 90° zu 180°	von 180° zu 270°	von 270° zu 360°
ist für die Sinus	+	+	−	−
" " Cosinus	+	−	−	+
" " Tangenten	+	−	+	−
" " Cotangenten	+	−	+	−

Das Zeichen ÷ drückt die positive Differenz der Größen aus, zwischen denen es steht; < oder > hat die gewöhnliche Bedeutung; ≷ zeigt an, daß von den Größen, zwischen welchen es steht, die eine eben so gut größer als kleiner sein dürfe, wie die andere.

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.
Zwei Seiten $A \lessgtr C$ mit dem zwischen ihnen liegenden Winkel: b.	a. Einer der unbekannten Winkel.	$\cot a = (\cot A \cdot \sin C - \cos b \cdot \cos C) : \sin b$ oder: $\operatorname{tang} a = -\frac{\operatorname{tang} b \cdot \cos \varphi}{\cos (C + \varphi)}$ wenn $\cot \varphi = \cos b \cdot \operatorname{tang} A$.
	α und σ beide unbekannte Winkel zugleich.	$\operatorname{tang} \sigma = \cot \frac{1}{2} b \cdot \cos \frac{1}{2}(A + C) : \cos \frac{1}{2}(A - C)$ $\operatorname{tang} \delta = \cot \frac{1}{2} b \cdot \sin \frac{1}{2}(A + C) : \sin \frac{1}{2}(A - C)$ $(\sigma + \delta) =$ dem größeren, $(\sigma - \delta) =$ dem kleineren Winkel.
	B. Die unbekannte Seite.	$\cos B = \cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$ oder: $\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{((\sin \frac{1}{2}(A - C))^2 + \sin A \cdot \sin C \cdot (\sin \frac{1}{2} b)^2)}$ oder: $\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{((\cos \frac{1}{2}(A + C))^2 + \sin A \cdot \sin C \cdot (\sin \frac{1}{2} b)^2)}$ oder: $\cos B = \frac{\cos A \cdot \sin (C + \varphi)}{\sin \varphi}$ wenn $\cot \varphi = \operatorname{tang} A \cdot \cos b$ oder: $\sin \frac{1}{2} B = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + C)}{\cos \psi}$ wenn $\operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{\sin A \cdot \sin C}}{\sin \frac{1}{2}(A - C)}$ oder: $\cos \frac{1}{2} B = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + C)}{\cos \chi}$ wenn $\operatorname{tang} \chi = \frac{\cos \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{\sin A \cdot \sin C}}{\cos \frac{1}{2}(A + C)}$
Zwei Winkel $a \lessgtr c$ mit der zwischen ihnen liegenden Seite: B.	A. Eine der unbekannten Seiten.	$\cot A = (\cos B \cdot \cos c + \sin c \cdot \cot a) : \sin B$ oder: $\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} B \cdot \sin \varphi}{\sin (c + \varphi)}$ wenn $\operatorname{tang} \varphi = \cos B \cdot \operatorname{tang} a$
	A und C beide unbekannte Seiten zugleich.	$\operatorname{tang} \sigma = \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \cdot \cos \frac{1}{2}(a - c) : \cos \frac{1}{2}(a + c)$ $\operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \cdot \sin \frac{1}{2}(a - c) : \sin \frac{1}{2}(a + c)$ $(\sigma + \delta) =$ der größeren, $(\sigma - \delta) =$ der kleineren Seite.
	b. Die unbekannte Winkel.	$\cos b = \cos B \cdot \sin a \cdot \sin c - \cos a \cdot \cos c$ oder: $\sin \frac{1}{2} b = \sqrt{((\cos \frac{1}{2}(a + c))^2 + \sin a \cdot \sin c \cdot (\sin \frac{1}{2} B)^2)}$ oder: $\cos \frac{1}{2} b = \sqrt{((\sin \frac{1}{2}(a - c))^2 + \sin a \cdot \sin c \cdot (\cos \frac{1}{2} B)^2)}$ oder: $\cos b = -\frac{\cos a \cdot \cos (c + \varphi)}{\cos \varphi}$ wenn $\operatorname{tang} \varphi = \cos B \cdot \operatorname{tang} a$ oder: $\sin \frac{1}{2} b = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + c)}{\cos \psi}$ wenn $\operatorname{tang} \psi = \frac{\sin \frac{1}{2} B \cdot \sqrt{\sin a \cdot \sin c}}{\sin \frac{1}{2}(a + c)}$ oder: $\cos \frac{1}{2} b = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - c)}{\cos \chi}$ wenn $\operatorname{tang} \chi = \frac{\cos \frac{1}{2} B \cdot \sqrt{\sin a \cdot \sin c}}{\sin \frac{1}{2}(a - c)}$
Alle drei Seiten $A \lessgtr B \lessgtr C \lessgtr A$	a. Einer der unbekannten Winkel.	$\cos a = (\cos A - \cos B \cdot \cos C) : (\sin B \cdot \sin C)$ oder: $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{(\sin (P - B) \cdot \sin (P - C) : (\sin B \cdot \sin C))}$ wenn $P = \frac{1}{2}(A + B + C)$ oder: $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{(\sin P \cdot \sin (P - A) : (\sin B \cdot \sin C))}$ oder: $\cos a = \frac{\cos (A + \varphi)}{\sin B \cdot \sin C \cdot \cos}$ wenn $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin A}$

Fortsetzung der Tafel VIII.

Gegeben.	Gesucht.	Gleichungen für das Gesuchte und die Hülfsgrößen.
Alle drei Winkel $a \lessgtr b \lessgtr c \lessgtr a$.	A. Eine der unbekannten Seiten.	$\cos A = (\cos a + \cos b \cdot \cos c) : (\sin b \cdot \sin c)$ oder: $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \cos (p-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$ oder: $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos p \cdot \cos (p-b)}{\sin b \cdot \sin c}}$ wenn $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ oder: $\cos A = \frac{\sin (A+\varphi)}{\sin b \cdot \sin c \cdot \sin \varphi}$ wenn $\cot \varphi = \frac{\cos b \cdot \cos c}{\sin a}$
Zwei Seiten $A \lessgtr B$ mit einem nicht zwischen ihnen liegenden Winkel b.	a. Der andere nicht eingeschlossene Winkel.	$\sin a = \sin A \cdot \sin b : \sin B$. Es ist $a < 90°$ wenn $b < 90°$ und $B > A$ $a > 90°$ wenn $b < 90°$, $A > 90°$ und $B > (180° - A)$ $a < 90°$ wenn $b > 90°$, $A < 90°$ und $B < (180° - A)$ $a > 90°$ wenn $b > 90°$ und $B < A$ $a = 90°$ wenn $\sin a = \sin$ tot. Unter andern Umständen ist $a \lessgtr 90°$.
	c. Der eingeschlossene Winkel.	$\tang \frac{1}{2} c = \frac{\cos b : \sin B \pm \sqrt{(\sin B^2 - \sin b^2 \cdot \sin A^2)}}{\sin b \cdot \sin (A+B)}$ oder: $\sin \sigma = \cot B \cdot \tang A \cdot \sin \varphi$ wenn $\tang \varphi = \cos A \cdot \tang b$. und es ist: $c \lessgtr 180° \mp \sigma - \varphi$.
	C. Die dritte Seite.	$\tang \frac{1}{2} C = \frac{\cos b \cdot \sin A \pm \sqrt{(\sin B^2 - \sin b^2 \cdot \sin A^2)}}{\cos A + \cos B}$ oder: $\sin \sigma = \cos B \cdot \sin \varphi : \cos A$ wenn $\cot \varphi = \cos b \cdot \tang A$ und es ist: $C \lessgtr 180° \mp \sigma - \varphi$
Zwei Winkel $a \lessgtr b$ mit einer nicht zwischen ihnen liegenden Seite B.	A. Die andere nicht eingeschlossene Seite.	$\sin A = \sin a \cdot \sin B : \sin b$. Es ist $A > 90°$ wenn $B > 90°$ und $b < a$. $A < 90°$ wenn $B > 90°$, $a < 90°$ und $b < (180° - A)$ $A > 90°$ wenn $B < 90°$, $a > 90°$ und $b > (180° - A)$ $A < 90°$ wenn $B < 90°$ und $b > a$. $A = 90°$ wenn $\sin A = \sin$ tot. Unter andern Umständen ist $A \lessgtr 90°$.
	C. Die eingeschlossene Seite.	$\tang \frac{1}{2} C = \frac{\sin b \cdot \cos B \pm \sqrt{(\sin b^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2)}}{\sin B \cdot \sin (a+b)}$ oder: $\cos \sigma = -\cot b \cdot \tang a \cdot \cos \varphi$ wenn $\cot \varphi = \cos a \cdot \tang B$ und es ist: $C \lessgtr 180° \mp \sigma - \varphi$.
	c. Der dritte Winkel.	$\tang \frac{1}{2} c = \frac{\sin a \cdot \cos B \pm \sqrt{(\sin b^2 - \sin a^2 \cdot \sin B^2)}}{\cos b - \cos a}$ oder: $\cos \sigma = -\cos b \cdot \cos \varphi : \cos a$ wenn $\tang \varphi = \cos B \cdot \tang a$ und es ist: $c \lessgtr 180° \mp \sigma - \varphi$.

Druckfehler.

S. 9. Z. 4. v. unt. statt: Ebene lies: Ebenen. — S. 10. Z. 5. trenne man die Wörter: die weſt durch die Summe. — Eb. Z. 7. ſt. der l. den. — Eb. Z. 15. ſt. ihr l. ihn. — S. 11. Z. 18. ſt. ich l. ſich. — Eb. Z. 2. v. u. ſt. Da alſo l. Alſo, da ꝛc. — S. 13. Z. 15. ſt. vor l. von. — S. 15. Z. 2. v. u. ſt. §. 8, 4. l. §. 8, 3. — S. 19. Z. 11. ſt. Summen l. Summe. — Eb. Z. 5. v. u. ſt. po l. pv. — Eb. Z. 4. v. u. ſt. k und o, v und t l. a und d, b und k. — S. 22. Z. 19. ſt. bewirkt l. bemerkt. — S. 24. Z. 8. v. u. ſt. (§. 7) l. (7). — S. 26. Z. 1. v. u. ſt. Graben l. Gründen. — S. 30. Z. 6. ſt. bd l. ab. — S. 34. Z. 3. ſt. Thatſache l. Thatſachen. — S. 37. Z. 19. ſt. ab=ah l. ab =bh. — Eb. Z. 23. ſt. die Seite ab l. die Seite ad. — S. 41. Z. 4. ſt. 190° l. 180°. — S. 47. Z. 5. ſt. bad▷bea l. bad◁bea. — S. 48. Z. 15. ſt. φ◁qr l. φ◁q+r. — S. 54. Z. 7. ſt. φ▷+qr. l. φ▷q+r. — S. 55. Z. 9 u. 10. v. u. ſt. m l. n. — S. 57. Z. 6 u. 12. v. u. ſt. Perpendikalbogen l. Perpendikelbogen. — S. 58. Z. 10. ſt. afg l. dfg. — S. 64. ſt. 34g. 8. l. 34g. 18. — S. 66. Z. 9. ſt. Perpendikalb. l. Perpendikelb. — S. 69. Z. 11. ſt. ◁ l. ▷. — S. 72. Z. 1. ſt. fQ◁dQ l. fQ◁oQ. — Eb. Z. 4. ſt. sfQ▷soQ l. sfb▷sob. — Eb. Z. 8. v. u. ſt. apponirte l. opponirte. — Eb. Z. 2. v. u. ſt. einen l. einem. — S. 75. Z. 15. ſt. demſelben l. deſſelben. — S. 84. Z. 6. v. u. ſt. sfd l. sdf. — S. 89. Z. 2. v. u. ſt. (§. 22, 7) l. (§. 22, 6). — S. 90. Z. 1. v. u. ſt. (§. 34, 4) l. (§. 35, 4). — S. 92. Z. 19. ſt. erhebt l. erhellt. — S. 113. Z. 8. v. u. ſt. uQ l. aQ. — S. 118. Z. 15. v. u. ſt. l▷R l. l◁r. — S. 120. Z. 11. ſt. ihn l. ihm. — S. 144. Z. 14. ſt. dem l. den. — S. 151. Z. 17. v. u. ſt. Fig. 29, c l. Fig. 28, o. — S. 152. Z. 9. v. u. ſt. Seiten l. Seite. — S. 157. Z. 21. ſt. Proportion l. Proportionen. — S. 167. Z. 13. ſt. r l. l. — S. 174. Z. 7. ſt. L l. R. — S. 176. Z. 13. ſt. innerhalb l. auperhalb. — S. 181. Z. 9. ſt. zerlege l. zerlegt. — S. 187. Z. 4. ſt. Rr. 10. l. Rr. 20. — S. 193. Z. 8. ſt. Halbſummen l. Halbſumme. — S. 199. in Z. 27. ſt. (φ=ψ) l. (φ+ψ). — S. 201. Z. 5. v. u. ſt. den vier l. der vier ꝛc. — S. 207. Z. 21. ſt. a2ω l. a=2ω. — S. 209. Z. 11. ſt. (cos½)A² l. (cos½A)². — S. 210. Z. 2. v. u. ſt. worden l. werden. — S. 215. Z. 12. ſt. cos½(B÷C) l. cos½(B+C). — S. 217. Z. 4. ſt. C l. B. — S. 221. Z. 6. iſt einmal: cosC. zu ſtreichen. — S. 238. Z. 4. ſt. ½b l. ½b. — Eb. Z. 10. v. u. fehlt bei log sin½(A+C) die negative Characteriſtik 1. — S. 241. Z. 10. ſt. 79° l. 70°. — S. 247. Z. 9. zur rechten ſt. 36,7″ l. 23,3″. — S. 249. Z. 13. v. u. iſt hinter: ſind das Zeichen: = zu ſtreichen. — S. 251. Z. 3. v. u. zur linken ſt. ſubt. l. add.

Die folgenden Berichtigungen, welche bei der zum Druck gegebenen Abſchrift des Originalmanuſcripts, und ſomit auch bei der Correctur außer Acht gelaſſen ſind, wolle der Leſer gütig entſchuldigen und nachtragen:

S. 102. Z. 7. v. u. hinter: ſo iſt, desgl. S. 104. Z. 12. hinter: unſupplementariſch ſind, ſchalte man die Worte ein: falls zugleich R vom Perpendikelbogen vor r verſchieden iſt. —

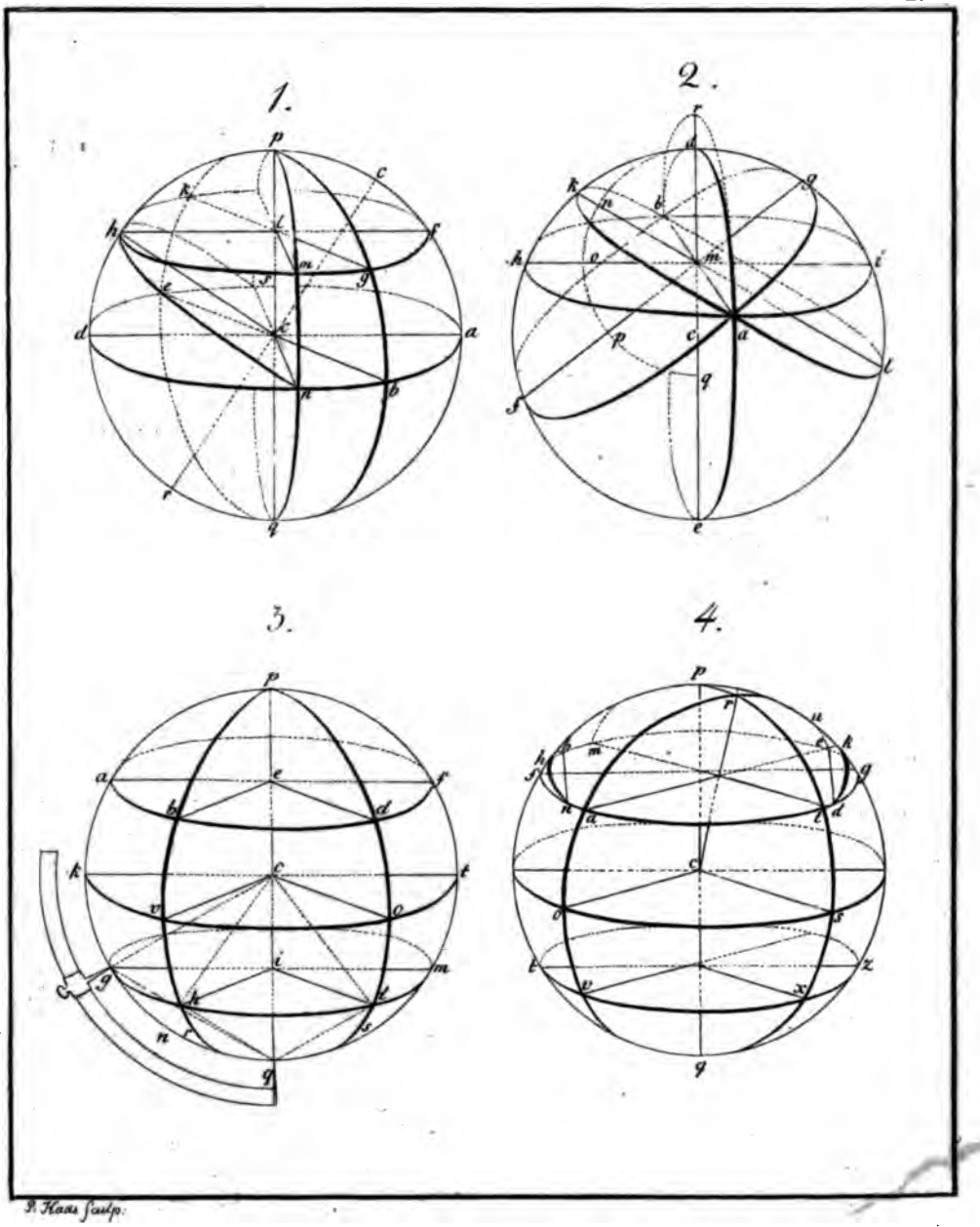
S. 117. Z. 2. und 4 hinter: zweideutig, desgl. S. 118. Z. 17. hinter: unſupplementariſch ſind: ſchalte man ein: falls zugleich l von dem mit ihm gleichartigen Perpendikelbogen vor aber hinter r an Graden verſchieden iſt.

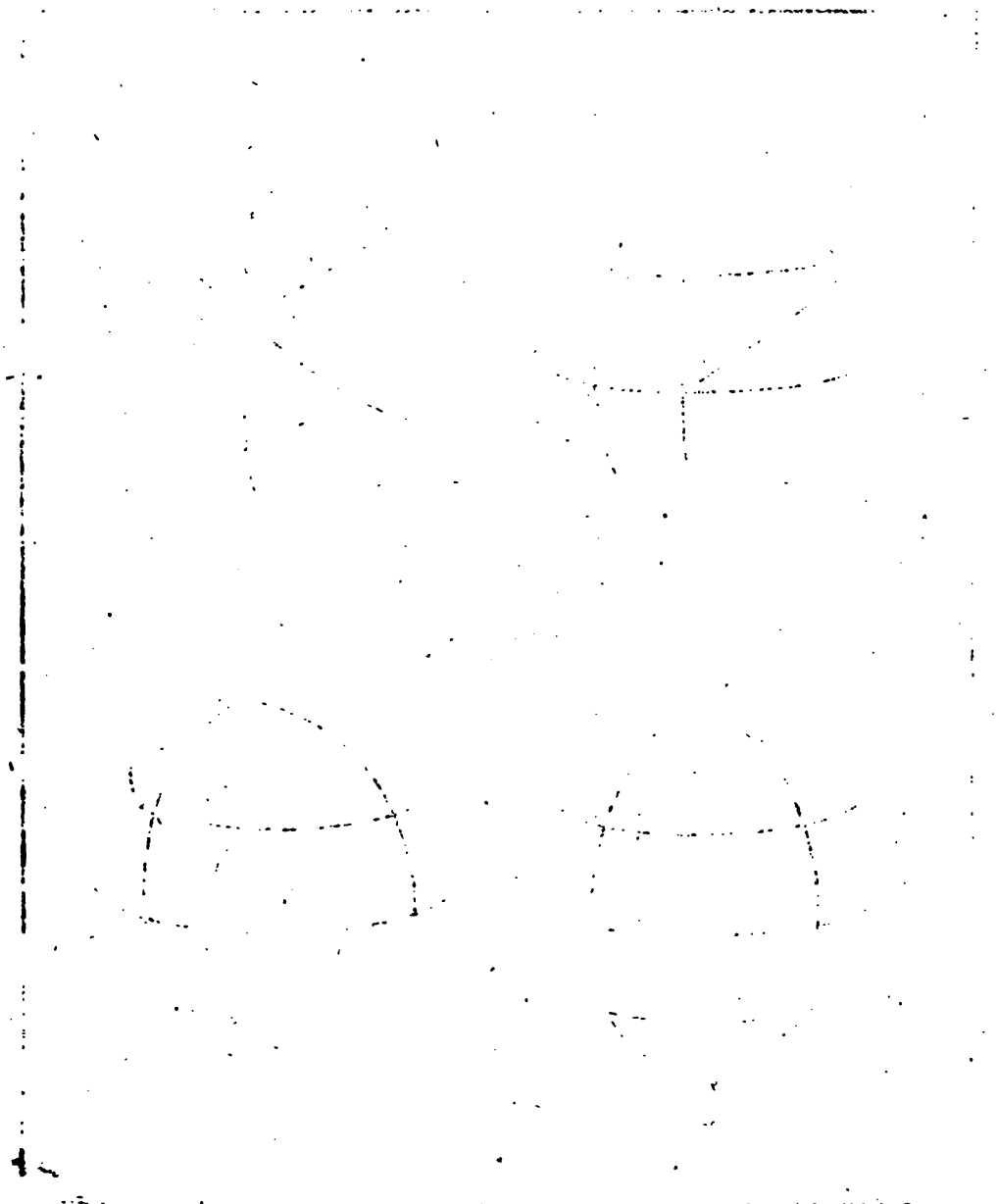
S. 161. Z. 10. hinter: höchſtens eben ſo groß ſupplire man die Parentheſe: (welches letztere aber verm. §. 36,7 unter der herſchenden Vorausſetzung hier begreiflich gar nicht ſtatt finden kann).

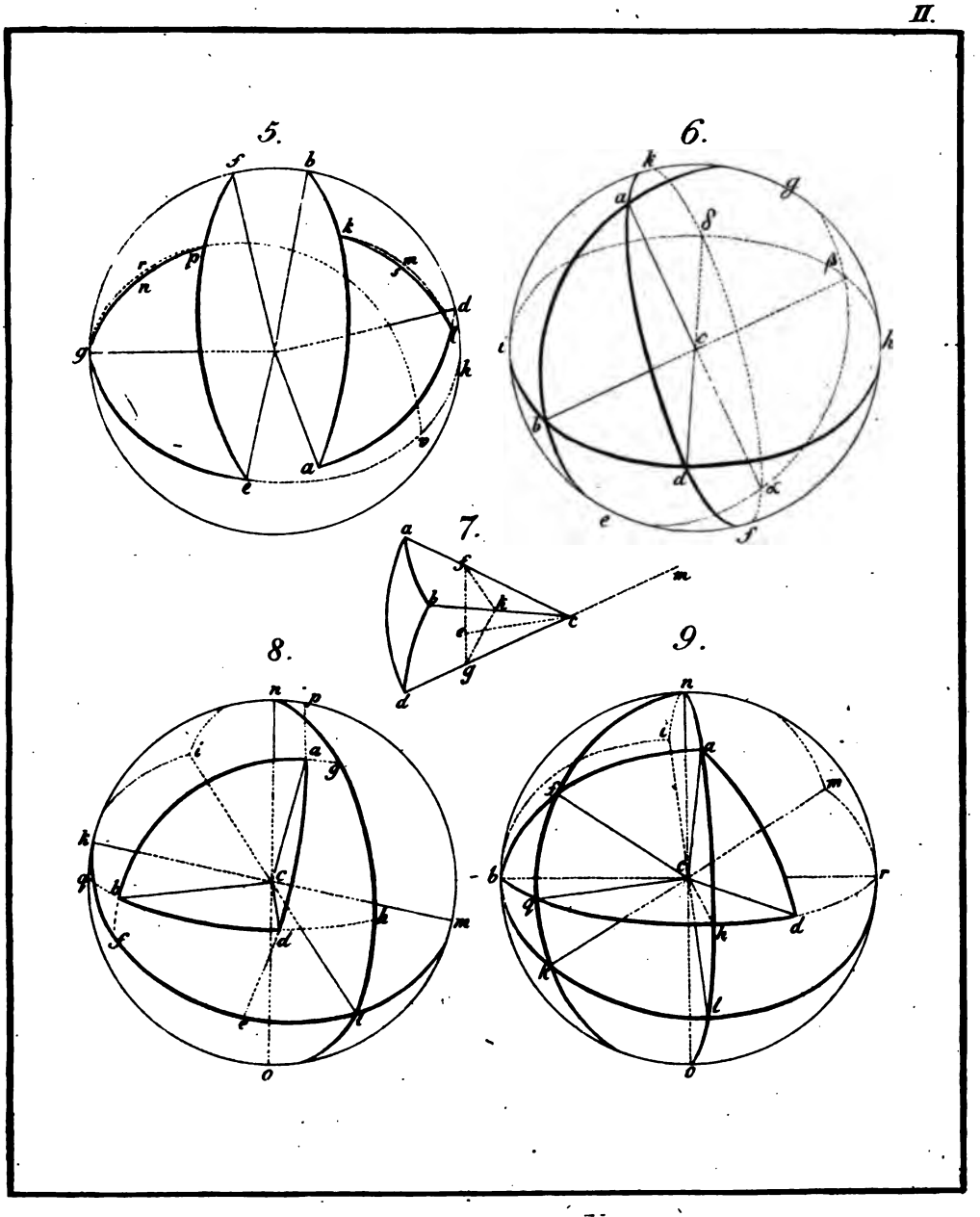
Auch ſind auf S. 103, desgl. auf S. 117. bei 14—17. die überflüſſigen Beſtimmungen:

R◁90° — R▷90°, l▷90° — l◁90°,

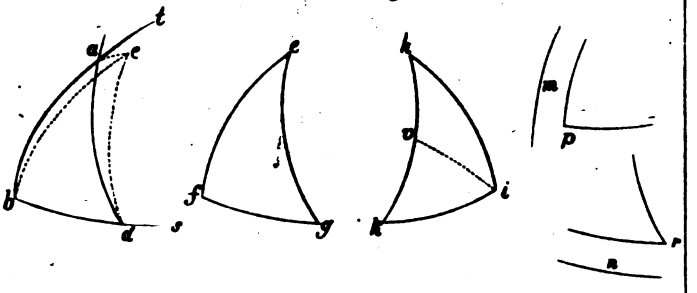
gänzlich zu ſtreichen oder wenigſtens einzuklammern.


1.
2.
3.
4.
P. Haas sculp.

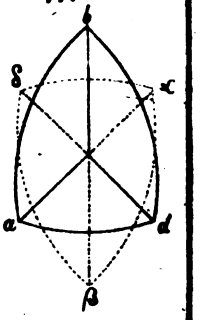



5.
6.
7.
8.
9.

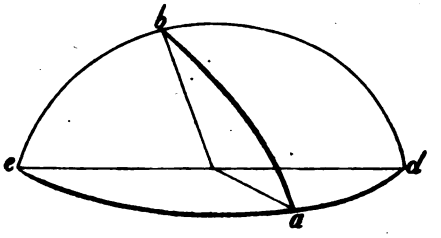
10.



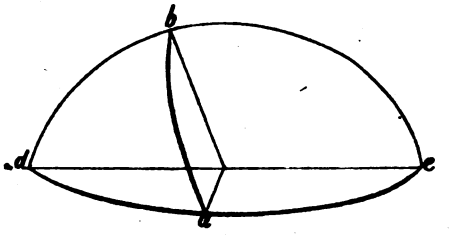
11.



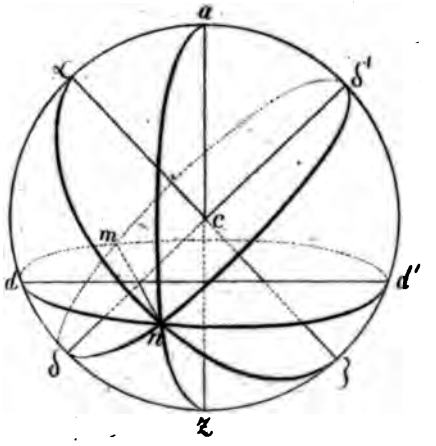
12.



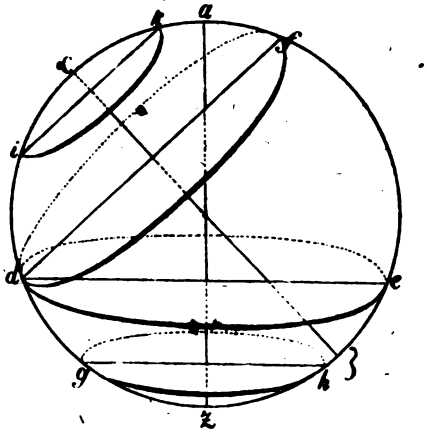
13.

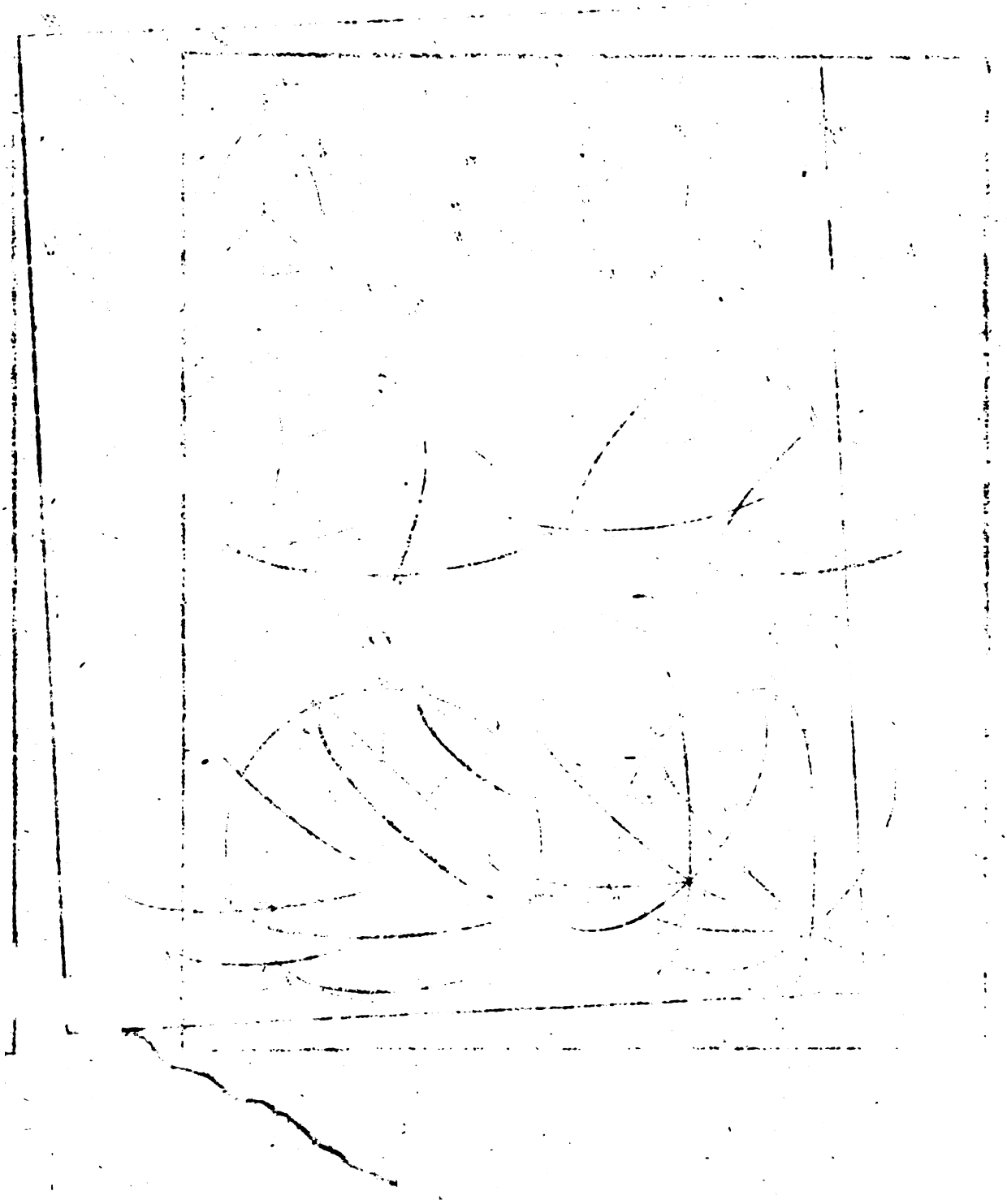


14.

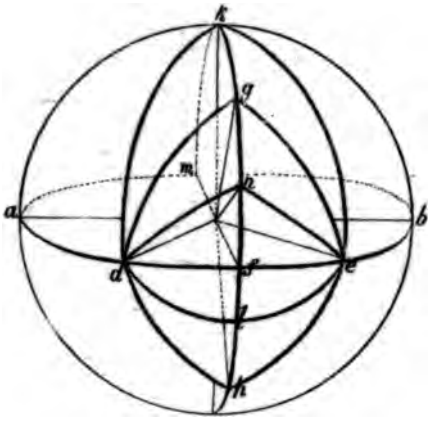


15.

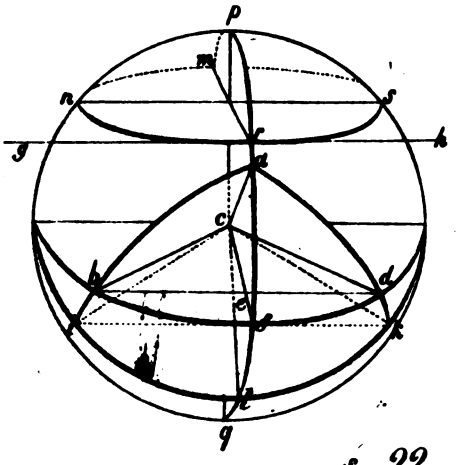




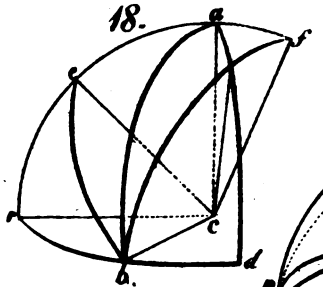
16.



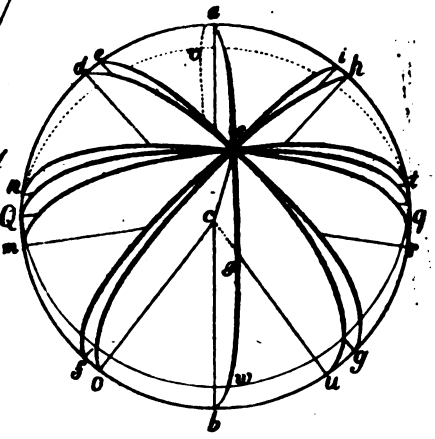
17.



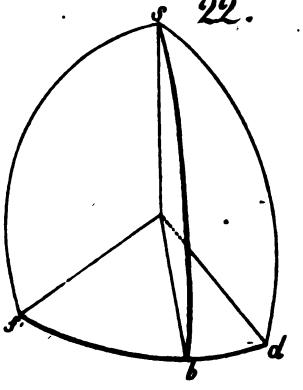
18.



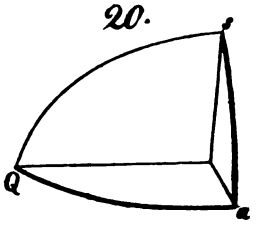
19.



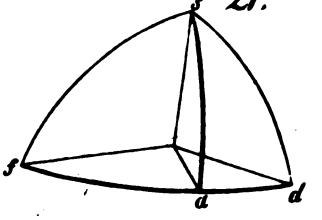
22.



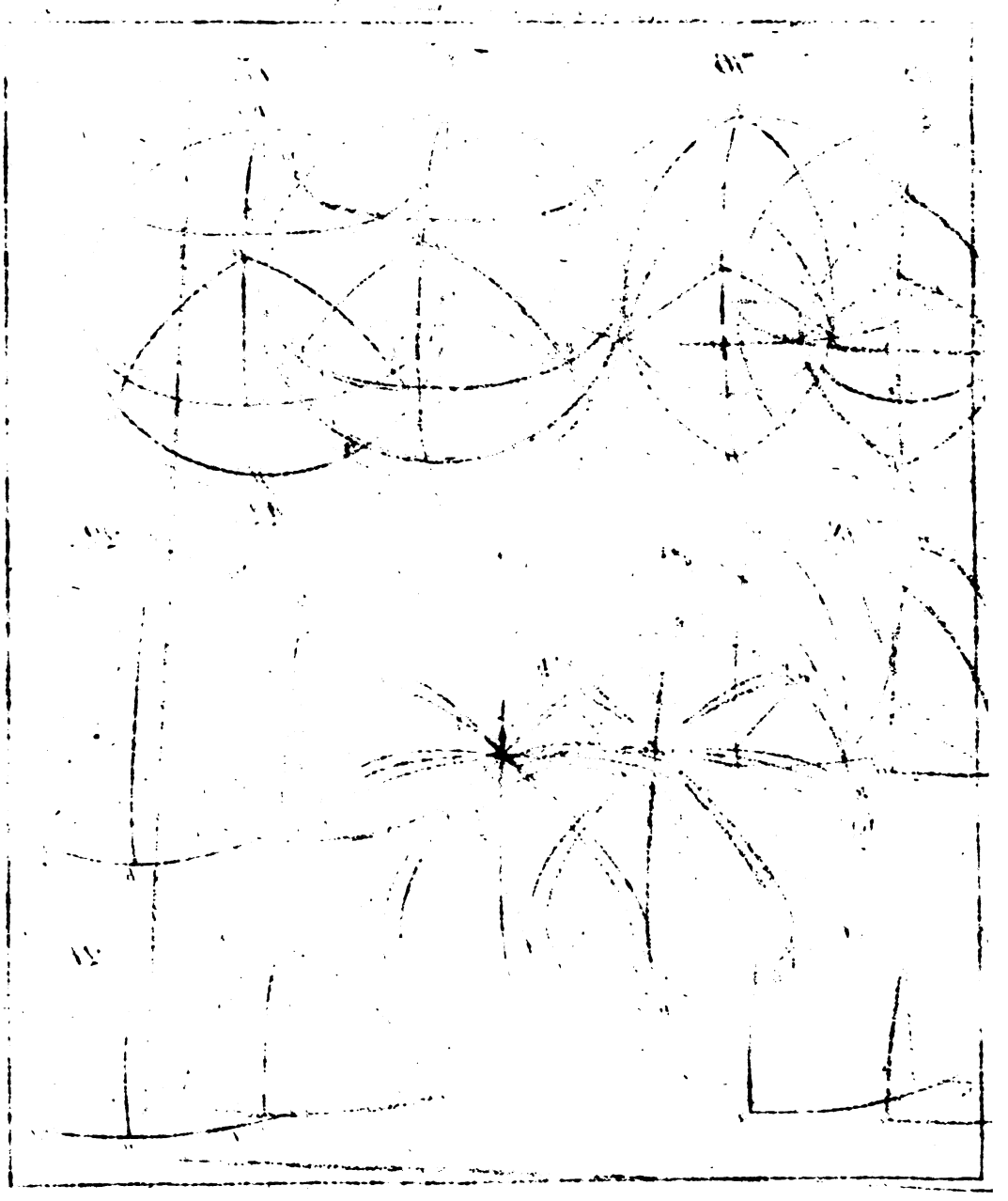
20.



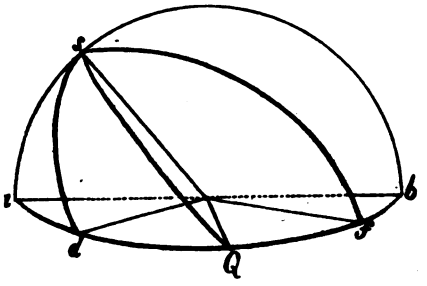
21.



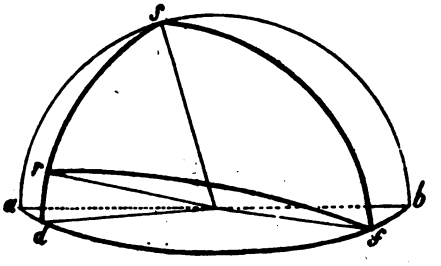
J. Haas fulp.



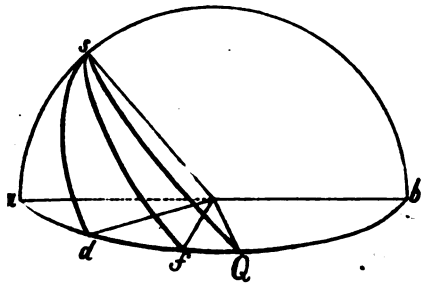
23.



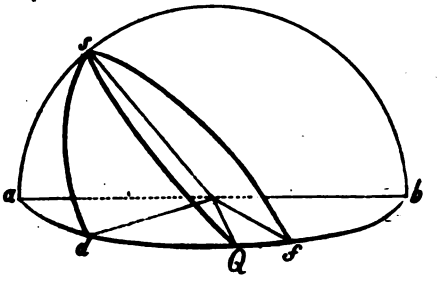
26.



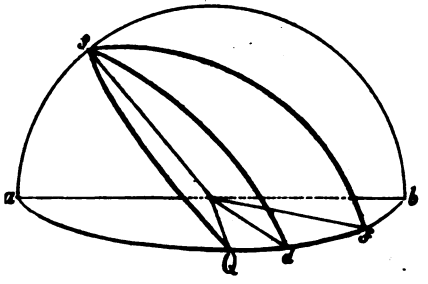
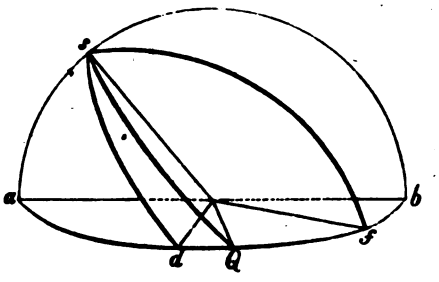
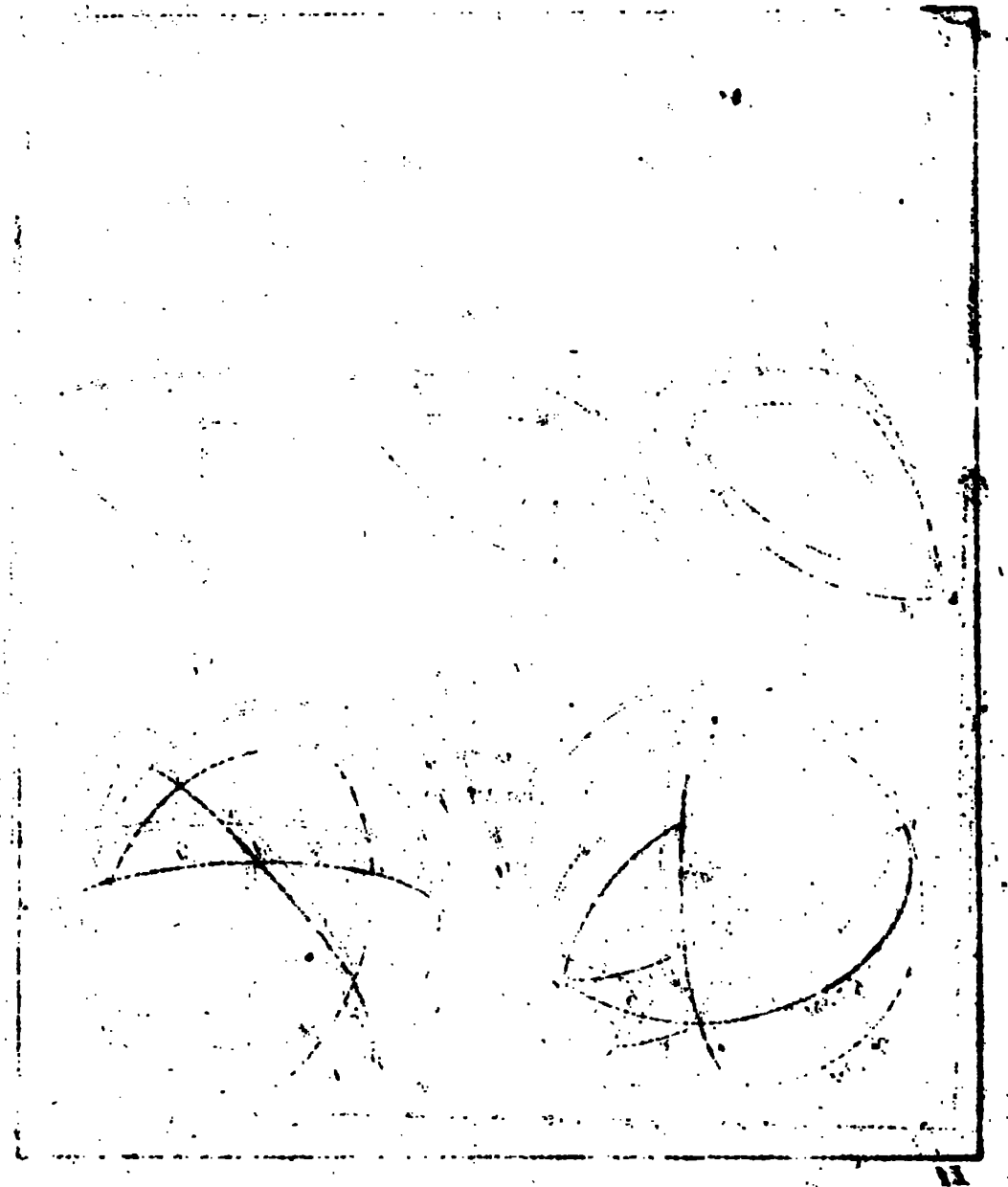
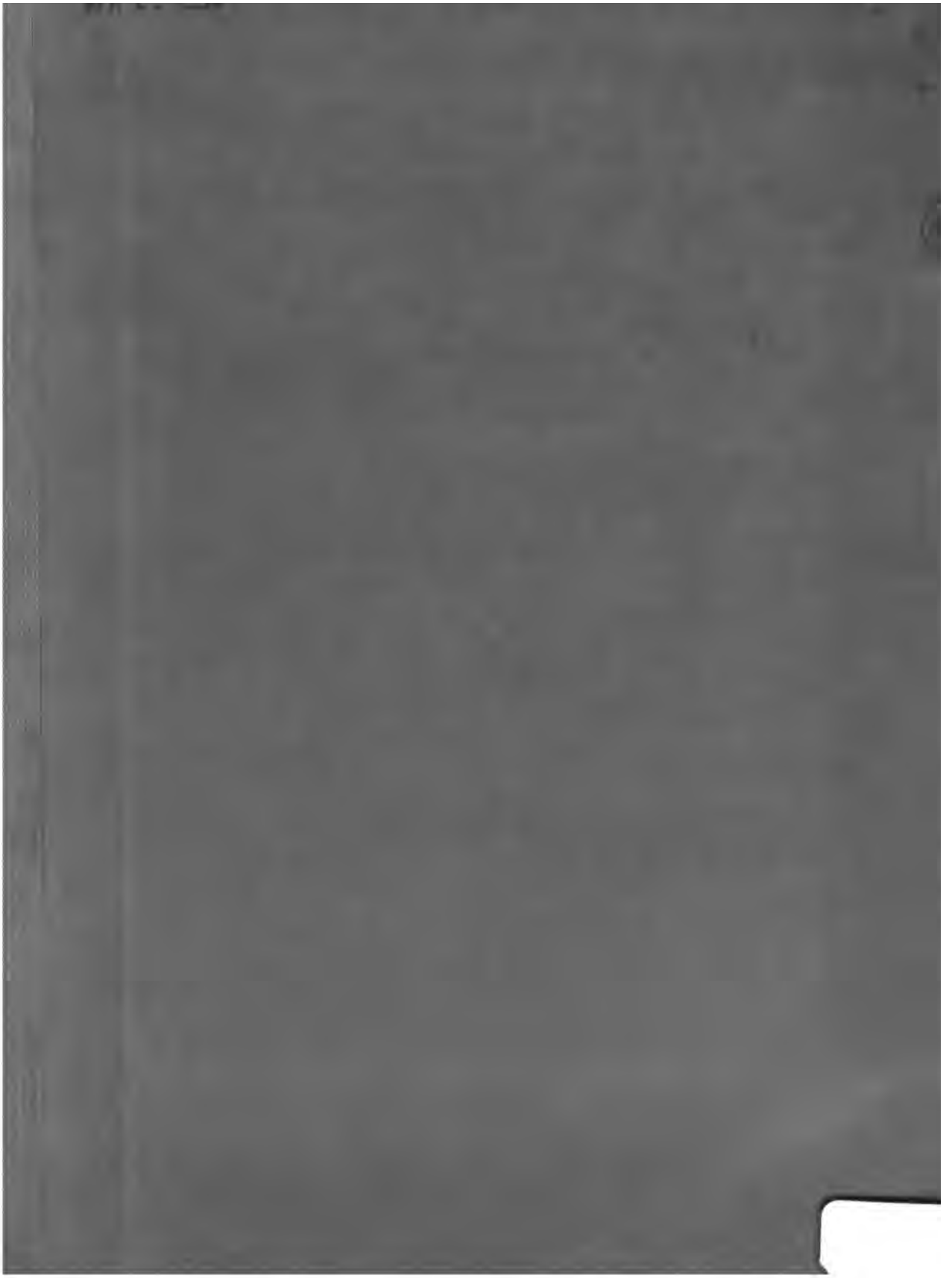
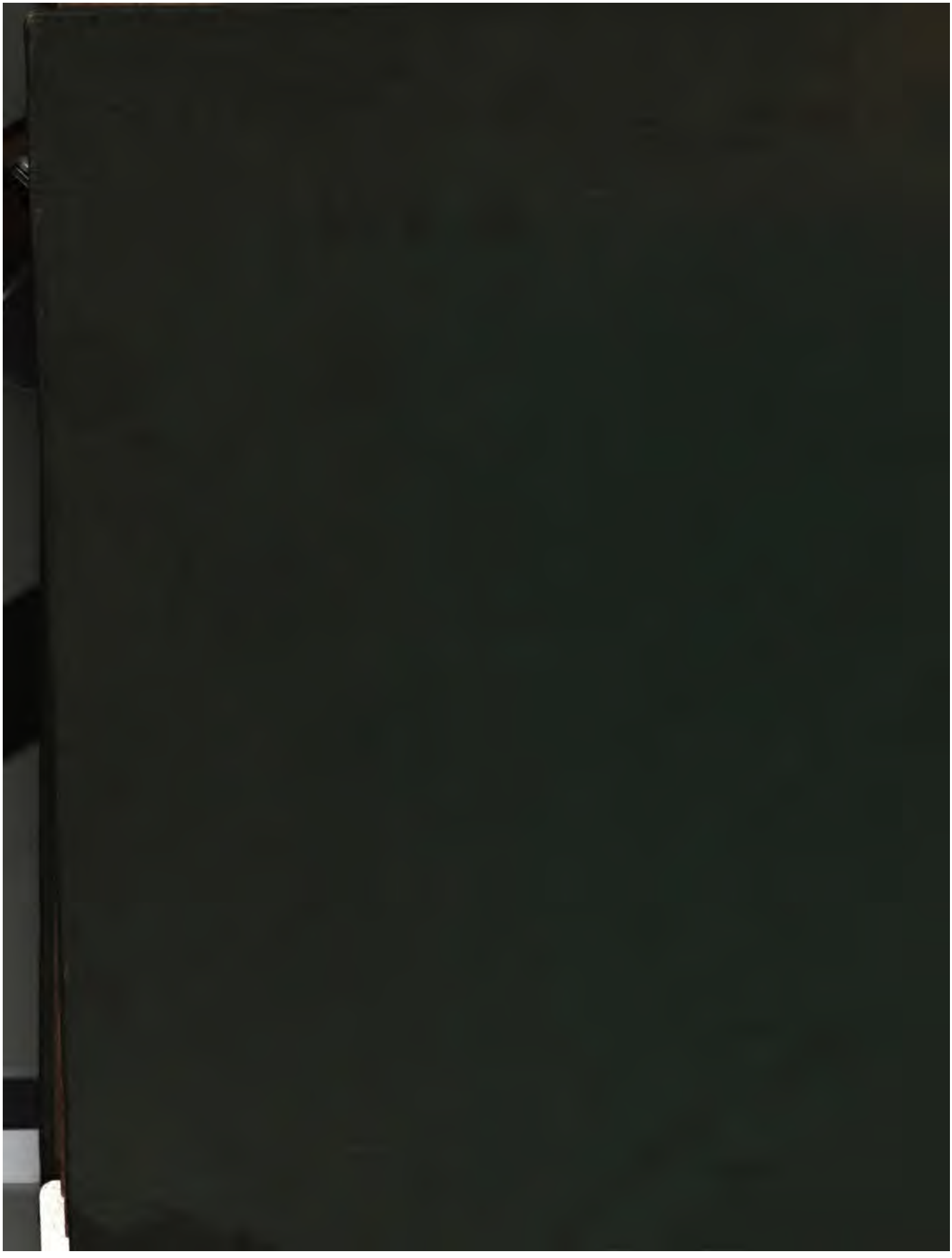
24.a.



24.b



25.a.



25.b.